第1卷第1期　　气象科学研究院院刊　　Vol. 1, No. 1
JOURNAL OF ACADEMY OF METEOROLOGICAL SCIENCE, S. M. A., CHINA
1986年 6 月　　Jun., 1986

层状云微物理过程的数值模拟(一)
——微物理模式*

胡志晋　严采蘩
（气象科学研究院人工影响天气研究所）

提　　要

本文提出了一个比较完整的层状云参数化微物理方程组。根据理论和实验结果推导了18种层状云中常见的微物理过程中云滴、雨滴、冰晶、雪团和霰的群体比水量和比浓度的转化率，它们包括凝结（蒸发）、凝华、碰并、聚合、淞附、冰晶的核化、繁生以及冰—霰、雪—霰、云—雨的自动转化率等。

一、概　　述

1. 引言

近年来，国内外对层状云进行了大量探测研究，其中规模较大的有苏联对冬季层状云的探测和人工降水试验、美国对温带气旋云系和地形云的研究以及我国北方层状云的研究。探测研究结果表明了层状云降水过程的复杂性：在动力学方面，存在着垂直气流较强的中小尺度结构；在微物理方面，除冰晶过程（伯杰龙过程）外，淞附、聚合、繁生、冰晶凝华、暖雨过程等在一定的温度和上升气流下对降水起着重要的作用。为了解释探测的结果，研究在不同宏观条件下各种微物理过程对降水的作用和人工降水的潜力，必须建立一个比较完整的、包括各种主要降水粒子形态和微物理过程的层状云模式。国内外已有的层状云模式[1-5]都不能满足这一要求。近年来云物理观测和实验的进展为这种模式的建立提供了基础[6]。有一些微物理过程（如冰粒子的碰并）虽然还没有一致确认的研究结果用以推导精确的数学模式，但在总的模式中包括它们的近似表达式则是可行的和必要的。本文的研究工作属于"北方层状云"课题，全文将分为三个部分。第一部分为层状云微物理模式，第二部分为中纬度气旋云系微物理过程的数值模拟，第三部分为中国北方层状云微物理过程的数值模拟。

2. 云和降水微物理特征的参数化

云和降水的微物理特征十分复杂，它包括各种相态、大小、形状、密度的粒子，其质量、落速、增长速率等差别很大。详细描述它们的物理变量将多达几百个。混合云模式的方程组将非常庞大而很难解出。因此人们抓住粒子群的主要特征用少数几个参数来描述它们，进而用少数几个方程来计算它们的演变过程。Kessler[7]把暖云中的水滴分为云滴和雨滴两类，用

* 本文于1985年10月7日收到，1985年12月5日收到修改稿。

各自的比水量*(Q_c、Q_r)来描述。雨滴的大小则由雨滴谱$n(D)=n_0e^{-\lambda D}$来确定。式中n_0为定值，特征直径λ^{-1}是Q_r的函数。这样用一个参数Q_r就可以描述雨滴群体，雨滴的比浓度N_r成了Q_r的函数。这种方法被广泛应用于云的数值模拟。实际观测表明，雨滴谱的n_0值不是常数，甚至在一次降雨过程中短时内就可改变2个量级以上[6a]。雨滴比浓度也不是比水量的函数。我们采用双参数模式[1, 2]，即用比水量和比浓度两个参数来描述一种水粒子群体。对于雨滴谱，n_0和λ都不是定值而是Q_r和N_r的函数。这种模式对于冰相过程尤为重要。因为冰粒子比浓度可在10^{-3}—10^{2}/克的范围内变化，其数值对降水过程十分重要，人工影响天气中冷云催化的原理就是改变冰粒子比浓度。因此，用专门的方程组来计算冰粒子比浓度的演变是十分必要的。Cotton[4]在模拟冬季地形云时所用云模式中没有计算冰粒子比浓度的演变，结果不好；采用实测冰晶浓度后才得到比较合理的结果。

我们根据层状云中水的相态、形状、比重等将水分成6种，即水汽（v）、云滴（c）、雨滴(r)、冰晶（i）、雪团（s）和霰（g)。云滴和雨滴是大小不同的水滴，以半径100微米为分界。冰晶是各种大小和各种形状的主要由水汽凝华形成的晶体，它包括雪晶。雪团是冰晶的聚合体。霰是以云滴冻结组合为主的冰球。雨滴在低温下能冻结成冻滴，其物理特性和增长率的变化不大（水汽扩散增长率的差别较大，但其贡献较小)，所以不予区分。模式中的微物理特征参数为水汽和云滴的比水量（Q_v、Q_c）以及冰晶、雪团、霰、雨滴的比水量和比浓度(Q_i、Q_s、Q_g、Q_r、N_i、N_s、N_g、N_r)，其中云滴的比浓度作为定值处理。

3. 各种粒子群体谱和特征量

云和降水粒子群的大小分布根据实测资料可用伽玛分布来近似，即

$$dN=N_0D^{\alpha}e^{-\lambda D}dD \tag{1}$$

式中dN为直径是D到$D+dD$的粒子比浓度，α、N_0、λ是参数。

（1）云滴谱

采用Хргиан-Мазин的云滴谱，即$\alpha=2$。层状云中云滴浓度除云底附近外变化较小，模式中没有详细考虑凝结核化过程，简单地假定云滴比浓度为常量，即

$$\left.\begin{aligned}
N_c&=\int_0^{\infty}N_{0c}D^2e^{-\lambda_cD}dD=2N_{0c}\lambda_c^{-3}=\text{const}\\
Q_c&=\int_0^{\infty}N_{0c}\frac{\pi}{6}D^5e^{-\lambda_cD}dD\cdot\rho_w=10\pi\rho_wN_c\lambda_c^{-3}\\
\lambda_c&=\left(\frac{10\pi\rho_wN_c}{Q_c}\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$$N_{0c}=5\pi\rho_wN_c^2/Q_c$$

云滴特征尺度为：

$$\text{平均直径}\quad D_{c1}=\int_0^{\infty}N_{0c}D^3e^{-\lambda_cD}dD/N_c=3\lambda_c^{-1}$$

* 比水量是单位质量空气中该种水粒子的总质量，它同含水量（单位体积空气中水粒子的总质量）不同，不受空气密度变化的影响。比浓度是单位质量空气中该种水粒子的总个数。

$$\left.\begin{aligned}&\text{平方平均直径}\ D_{c2}=\left[\int_0^\infty N_{0c}D^4e^{-\lambda_cD}dD/N_c\right]^{\frac{1}{2}}\\&\qquad=\sqrt{12}\cdot\lambda_c^{-1}\approx3.5\lambda_c^{-1}\\&\text{立方平均直径}D_{c3}=\left[\int_0^\infty N_{0c}D^5e^{-\lambda_cD}dD/N_c\right]^{\frac{1}{3}}\\&\qquad=\sqrt[3]{60}\lambda_c^{-1}\approx3.9\lambda_c^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

云滴落速较小，假定$V_c=0$。

（2）雨滴谱、霰谱

采用Marshall-Palmer谱，即$\alpha=0$，对于霰谱也已为观测资料所肯定[4,6b]。单个粒子的质量（m）同直径（D）的关系为

$$m_{r(g)}=A_{mr(g)}\cdot D_{r(g)}^3\tag{4}$$

式中$A_{mr}=\frac{\pi}{6}\rho_w=0.524$克/厘米^3，$\rho_w$为水的密度；对于霰粒，根据Mason[8a]取$A_{mg}=0.065$克/厘米^3。

$$\left.\begin{aligned}&N_{r(g)}=N_{0r(g)}\cdot\lambda_{r(g)}^{-1}\\&Q_{r(g)}=6\cdot A_{mr(g)}\cdot N_{0r(g)}\cdot\lambda_{r(g)}^{-4}\\&\lambda_{r(g)}=\left[6A_{mr(g)}\cdot N_{r(g)}/Q_{r(g)}\right]^{\frac{1}{3}}\\&N_{0r(g)}=\left[6A_{mr(g)}/Q_{r(g)}\right]^{\frac{1}{3}}\cdot N_{r(g)}^{\frac{4}{3}}\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

雨滴和霰粒的特征尺度为：

$$\left.\begin{aligned}&\text{平均直径}D_{r(g)1}=\lambda_{r(g)}^{-1}\\&\text{平方平均直径}D_{r(g)2}=\sqrt{2}\lambda_{r(g)}^{-1}\approx1.4\lambda_{r(g)}^{-1}\\&\text{立方平均直径}D_{r(g)3}=\sqrt[3]{6}\cdot\lambda_{r(g)}^{-1}\approx1.8\lambda_{r(g)}^{-1}\\&\text{质量中值直径}D_{r(g)0}=3.67\cdot\lambda_{r(g)}^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

其中D_0的定义是$\int_0^{D_0}D^3dN=\frac{1}{2}\int_0^\infty D^3dN$

单个雨滴的落速同直径的关系按Lin和Orville[9]取$V_r=A_{vr}\cdot D_r^{0.8}$，式中$A_{vr}=2100$厘米$^{0.2}$·秒$^{-1}$。对于霰粒，根据Nakaya(1935)[8b]和Locatelli(1974)[6c]的实测结果，我们取$V_g=A_{vg}\cdot D_g^{0.8}$，式中$A_{vg}=500$厘米$^{0.2}$·秒$^{-1}$。大气中雨滴落速同气压（温度）有关，根据Beard[6d]的结果，我们取$V_r=A_{vr}\cdot D_r^{0.8}\cdot\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\alpha_1}$，式中$\alpha_1=0.286$。粒子群体的质量加权平均落速为：

$$\begin{aligned}\bar{V}_{r(g)}&=\frac{1}{Q}\int_0^\infty N_0e^{-\lambda D}A_m\cdot D^3\cdot A_{vr(g)}\cdot D^{0.8}\cdot dD=\frac{\Gamma(4.8)}{\Gamma(4)}\cdot A_{vr(g)}\cdot\lambda_{r(g)}^{-0.8}\\&\approx2.97\cdot A_{vr(g)}\cdot\lambda_{r(g)}^{-0.8}\end{aligned}\tag{7}$$

式中$\Gamma(x)$为伽玛函数。Kessler曾用直径为质量中值直径的粒子落速来代表群体落速，即

$$\bar{V}_{r(g)0}=3.67^{0.8}\cdot A_{vr(g)}\lambda_{r(g)}^{-0.8}\approx2.83\cdot A_{vr(g)}\cdot\lambda_{r(g)}^{-0.8}\tag{8}$$

同（7）式相比，差别很小。

（3）冰晶谱、雪团谱

冰晶、雪团的谱分布观测较少。游来光[9]用飞机观测得出冰晶谱有两种，即指数分布和正态分布，视冰晶形态而异。Hobbs等（1977）[6e]观测得到的冰晶谱大都呈单峰偏态分布，即介乎指数分布和正态分布之间。他们观测的(1974)[6f]雪团谱也有类似分布。据此，我们取它们的分布

$$dN_{i(s)}=N_{0i(s)}\cdot D_{i(s)}\cdot e^{-\lambda_{i(s)}D_{i(s)}}\cdot dD_{i(s)} \tag{9}$$

式中$N_{0i(s)}$和$\lambda_{i(s)}$为参数。单个冰晶的质量同其直径的关系按Mason[8c]为

$$m_i=A_{mi}\cdot D_i^2 \tag{10}$$

式中$A_{mi}=0.00038—0.0027$克/厘米^2，视冰晶形状而异。Hobbs[4]也得出相似结果。我们取$A_{mi}=0.001$克·厘米$^{-2}$。单个雪团的质量同它直径的关系根据Locatlli（1974）[6g]的观测结果可以归纳成类似的关系式：

$$m_s=A_{ms}\cdot D_s^2 \tag{11}$$

式中A_{ms}取0.003克·厘米$^{-2}$。

单个冰晶或雪团的落速同其直径关系根据Nakaya(1935)、Magono(1953)[8d]和Locatelli(1974)[6h]的结果，我们取：

$$V_{i(s)}=A_{vi(s)}\cdot D_{i(s)}^{\frac{1}{3}} \tag{12}$$

式中A_{vi}为40—70厘米$^{\frac{2}{3}}$·秒$^{-1}$，视冰晶形状而异；凇附冰晶A_{vi}可达140厘米$^{\frac{2}{3}}$·秒$^{-1}$。文中取$A_{vi}=70(1+F_i)$厘米$^{\frac{2}{3}}$·秒$^{-1}$。A_{vs}为100厘米$^{\frac{2}{3}}$·秒$^{-1}$，凇附雪团可达150厘米$^{\frac{2}{3}}$·秒$^{-1}$，文中取$A_{vs}=100(1+0.5F_s)$厘米$^{\frac{2}{3}}$·秒$^{-1}$。式中F_i，F_s为冰晶和雪团的凇附率。冰晶在大气中的落速还受气压等的影响，根据理论推导[6i]，可以归纳成气压订正项$(\frac{P_0}{P})^{\alpha_2}$，$P_0$为参考气压，$\alpha_2$对小冰晶为0，大冰晶为0.43，我们取$\alpha_2=0.25$。

冰晶和雪团的群体特征根据谱分布推出为

$$\left.\begin{aligned}
N_{i(s)}&=N_{0i(s)}\cdot\lambda_{i(s)}^{-2}\\
Q_{i(s)}&=6\cdot N_{0i(s)}\cdot A_{mi(s)}\cdot\lambda_{i(s)}^{-4}\\
\lambda_{i(s)}&=[6\cdot A_{mi(s)}N_{i(s)}/Q_{i(s)}]^{\frac{1}{2}}\\
N_{0i(s)}&=6\cdot A_{mi(s)}\cdot N_{i(s)}^2/Q_{i(s)}
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}
D_{i(s)_1}&=2\lambda_{i(s)}^{-1}\\
D_{i(s)_2}&=\sqrt{6}\,\lambda_{i(s)}^{-1}=2.45\lambda_{i(s)}^{-1}\\
D_{i(s)_3}&=\sqrt[3]{24}\,\lambda_{i(s)}^{-1}=2.88\lambda_{i(s)}^{-1}\\
D_{i(s)_0}&=3.67\cdot\lambda_{i(s)}^{-1}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}
\bar{V}_{i(s)}&=\frac{\Gamma(4\frac{1}{3})}{\Gamma(4)}A_{vi(s)}\cdot\lambda_{i(s)}^{-\frac{1}{3}}=1.54A_{vi(s)}\cdot\lambda_{i(s)}^{-\frac{1}{3}}\\
\bar{V}_{i(s)_0}&=[3.67\cdot\lambda_{i(s)}^{-1}]^{\frac{1}{3}}\cdot A_{vi(s)}=1.54A_{vi(s)}\cdot\lambda_{i(s)}^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

4. 微物理方程组

微物理的变量为Q_v、Q_c、Q_r、Q_i、Q_s、Q_g、N_r、N_i、N_s、N_g等10个。根据上节的方程可推出它们的谱分布（即相应的N_0和λ）和特征量（D_1、D_2、D_3、D_0、$\bar{V}$、$\bar{V}_0$）。这10

个变量(M)的预报方程中考虑了它们的平流、湍流、自身下落和源汇项，即

$$\frac{\partial M}{\partial t}=-u\frac{\partial M}{\partial x}-v\frac{\partial M}{\partial y}-w\frac{\partial M}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}K\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}K\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial M}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho\bar{V}_m M}{\partial z}+\frac{\delta M}{\delta t} \tag{16}$$

式中M表示任一标量；u、v、w为气流在x、y、z方向上的分速度；K为湍流交换系数；$\bar{V}_m$为M标量（粒子群体）的平均落速（向下为正）；ρ为空气密度；$\frac{\delta M}{\delta t}$为$M$标量的源汇项,即微物理的转化项。除了这10个变量外，为了计算云、雨、冰、雪、霰之间的自动转化率，引进了云滴谱拓宽度F_c，冰晶、雪团的淞附度F_i、F_s等3个变量，它们也用式（16）计算，但不计下落的辐合项$\left(\frac{M}{\rho}\frac{\partial \rho\bar{V}_m}{\partial z}\right)$。

模式考虑了层状云中18种主要微物理过程：云滴和雨滴的凝结蒸发（S_{vc}、S_{vr}),冰晶、雪团和霰的凝华（S_{vi}、S_{vs}、S_{vg})，冰、雪、霰、雨对云滴的碰并（C_{ci}、C_{cs}、C_{cg}、C_{cr})，冰一冰、冰一雪、雪一雪的碰并聚合（C_{ii}、C_{is}、C_{ss})，雨滴间的碰并和破碎（C_{rr})，云一雨自动转化（A_{cr})、冰一霰，雪一霰的自动转化（A_{ig}、A_{sg})、冰晶的核化和繁生（P_{vi}，P_{ci})。各个微物理变量的源汇项方程为：

$$\frac{\delta Q_v}{\delta t}=-S_{vc}-S_{vi}-S_{vg}-S_{vr}-S_{vs}-P_{vi} \tag{17}$$

$$\frac{\delta Q_c}{\delta t}=S_{vc}-C_{ci}-C_{cs}-C_{cg}-C_{cr}-P_{ci}-A_{cr} \tag{18}$$

$$\frac{\delta Q_i}{\delta t}=S_{vi}+C_{ci}-C_{ii}-C_{is}-A_{ig}+P_{vi}+P_{ci} \tag{19}$$

$$\frac{\delta N_i}{\delta t}=NS_{vi}-NC_{is}-NC_{ii}-NA_{ig}+NP_{vi}+NP_{ci} \tag{20}$$

$$\frac{\delta Q_s}{\delta t}=S_{vs}+C_{cs}+C_{ii}+C_{is}-A_{sg} \tag{21}$$

$$\frac{\delta N_s}{\delta t}=NS_{vs}+\frac{1}{2}NC_{ii}-NA_{sg}-NC_{ss} \tag{22}$$

$$\frac{\delta Q_g}{\delta t}=S_{vg}+C_{cg}+A_{ig}+A_{sg} \tag{23}$$

$$\frac{\delta N_g}{\delta t}=NS_{vg}+NA_{ig}+NA_{sg} \tag{24}$$

$$\frac{\delta Q_r}{\delta t}=S_{vr}+C_{cr}+A_{cr} \tag{25}$$

$$\frac{\delta N_r}{\delta t}=NS_{vr}+NA_{cr}+NC_{rr} \tag{26}$$

式中S_{vi}、P_{vi}等是冰晶凝华和核化的质量增长率；NS_{vi}，NP_{vi}等为相应的冰晶比浓度增

长率。

除了这18种以外，模式还考虑了冰相粒子的融化过程，我们简单地假定在0℃层下面一个步长的距离内冰粒子全部融化为雨滴，即在0℃层下第一个格点上有：

$$\frac{\delta Q_r^*}{\delta t}=\frac{\delta Q_r}{\delta t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho Q_i\bar{V}_i}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho Q_s\bar{V}_s}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho Q_g\bar{V}_g}{\partial z} \tag{27}$$

$$\frac{\delta N_r^*}{\delta t}=\frac{\delta N_r}{\delta t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho N_i\bar{V}_i}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho N_s\bar{V}_s}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho N_g\bar{V}_g}{\partial z} \tag{28}$$

$$Q_i^*=Q_s^*=Q_g^*=N_i^*=N_s^*=N_g^*=0 \tag{29}$$

这种简化不能详细描述雷达回波的零度层亮带结构，但对降水增长过程带来的误差估计不大。模式忽略了雨滴的冻结，因为冻滴的增长过程同雨滴相差不多，而且在层状云中温度低于0℃区域里雨滴很少出现。

模式的初始条件为：

$$Q_c=Q_i=Q_s=Q_g=Q_r=N_i=N_s=N_g=N_r=0,\ Q_v=Q_{si}(T<273\mathrm{K}),Q_v=Q_{sw}(T\geqslant 273\mathrm{K}) \tag{30}$$

式中Q_{si}为冰面饱和比湿。这里我们略去了空气上升增湿达到饱和的过程，而在云区里直接开始成云过程。当然也可以用实测的比湿分布通过抬升增湿再形成云层。

边界条件，上边界（云顶）为：

$$Q_c=Q_i=Q_s=Q_g=Q_r=N_i=N_s=N_g=N_r=0,\quad Q_v=Q_{si} \tag{31}$$

下边界（云底）为：

$$Q_v=Q_{sw},Q_c=0,M(-1)=M(0) \tag{32}$$

式中$M(-1)$代表任一降水粒子质量或浓度在下边界外一格点的值，$M(0)$为相应的下边界上的值，这样使降水粒子自由落出下边界。

二、微物理方程

1. 雨、霰碰并云滴（C_{cr}，C_{cg}）

$$C_{cr}=\int_0^\infty N_{0r}e^{-\lambda D}\cdot\frac{\pi}{4}D^2\cdot A_{vr}D^{0.8}\cdot E\cdot\rho\cdot Q_c\cdot dD$$

$$=\frac{\pi}{4}\Gamma(3.8)\lambda_r^{-3.8}N_{0r}\cdot A_{vr}\cdot\rho\cdot Q_c\cdot\bar{E} \tag{33}$$

此式由Wesner（1972）等人在N_{0r}为常数的假定下采用。对于双参数模式可以推出：

$$C_{cr}=\frac{\pi}{4}\Gamma(3.8)\cdot A_{vr}\cdot\rho\cdot Q_c\cdot\bar{E}_{cr}\left[\frac{Q_r}{6\cdot A_{mr}\cdot N_r}\right]^{\frac{2.8}{3}}\cdot N_r\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\alpha_1} \tag{33a}$$

$$C_{cg}=\frac{\pi}{4}\Gamma(3.8)\cdot A_{vg}\cdot\rho\cdot Q_c\cdot\bar{E}_{cg}\left[\frac{Q_g}{6\cdot A_{mg}\cdot N_g}\right]^{\frac{2.8}{3}}N_g\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\alpha_1} \tag{34}$$

式中$\bar{E}_{cr}$、$\bar{E}_{cg}$为雨滴和霰碰并云滴群的平均碰并系数，取$\bar{E}_{cr}=\bar{E}_{cg}=0.8$。

2. 冰晶、雪团碰并云滴（C_{ci}，C_{cs}）

冰晶碰并云滴的观测实验研究尚不充分，从现有结果[6j]看来，(1) 直径小于10－20微米的云滴一般不能被冰晶碰并；(2) 直径小于阈值的冰晶不能碰并云滴，板状冰晶的阈值为300微米左右，柱状冰晶的阈值约为80微米；(3) 碰并系数一般是随冰晶的尺度增大的，根据Pitter[6k]和Schlamp[6l]的理论计算和Kajikawa[6m]的观测结果，我们取各种大小的板状冰晶同大于15微米的云滴碰并的平均碰并系数$\bar{E}_{ci}$如下：

$$\bar{E}_{ci}=\begin{cases} 0, & \text{当}D_i<0.03\text{厘米时} \\ 15\times(D_i-0.03), & \text{当}0.03<D_i<0.05\text{厘米时} \\ 0.3+10\times(D_i-0.05), & \text{当}0.05<D_i<0.07\text{厘米时} \\ 0.5+5\times(D_i-0.07), & \text{当}0.07<D_i<0.11\text{厘米时} \\ 0.7, & \text{当}D_i>0.11\text{厘米时} \end{cases} \tag{35}$$

云滴中$D>D_1^*$($D_1^*=15$微米）的比水量为

$$Q_c\Big|_{D>D_1^*}=\frac{\pi}{6}\rho_w\int_{D_1^*}^{\infty}N_{0c}\cdot D^5e^{-\lambda_cD}dD=e^{-\beta_1}\left[1+\beta_1+\frac{\beta_1^2}{2!}+\frac{\beta_1^3}{3!}+\frac{\beta_1^4}{4!}+\frac{\beta_1^5}{5!}\right] \tag{36}$$

式中$\beta_1=\lambda_c\cdot D_1^*=(10\rho_w\cdot\pi N_c)^{\frac{1}{3}}\cdot Q_c^{-\frac{1}{3}}\cdot D_1^*$

$$C_{ci}=\int_0^{\infty}N_{0i}De^{-\lambda_iD}\cdot\frac{\pi}{4}D^2\cdot A_{vi}\cdot D^{\frac{1}{3}}\overline{E}_{ci}\cdot\rho\cdot Q_c\cdot e^{-\beta_1}\left(1+\sum_{i=1}^{5}\frac{\beta_1^i}{i!}\right)dD$$
$$=\frac{\pi}{4}\Gamma\left(4\frac{1}{3}\right)\cdot A_{vi}\cdot\rho\cdot Q_c\cdot\overline{E}_{ci}\left(\frac{Q_i}{6A_{mi}N_i}\right)^{\frac{7}{6}}\cdot N_i\cdot e^{-\beta_1}\left(1+\sum_{i=1}^{5}\frac{\beta_1^i}{i!}\right) \tag{37}$$

式中$\overline{E}_{ci}$是用冰晶群体的质量中值直径$D_{i0}=\frac{3.67}{\lambda_i}$从式（34）求出。

雪团对云滴的碰并过程观测和研究较少，我们暂时取同冰晶相似的方程：

$$C_{cs}=\frac{\pi}{4}\Gamma\left(4\frac{1}{3}\right)\cdot A_{vs}\cdot\rho\cdot Q_c\cdot\overline{E}_{cs}\left(\frac{Q_s}{6\cdot A_{ms}\cdot N_s}\right)^{\frac{7}{6}}\cdot N_s\cdot e^{-\beta_1}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{5}\frac{\beta_1^i}{i!}\right) \tag{38}$$

式中$\overline{E}_{cs}$用雪团的质量中值直径$D_{s0}=\frac{3.67}{\lambda_s}$从式（34）求出。

3. 冰晶相互碰并、聚集成为雪团（C_{ii}）

冰晶群体的相互碰并机率为

$$NC_{ii}=\frac{\pi}{4}\rho\int_0^\infty\int_0^\infty N_{0i}^2\cdot e^{-\lambda_i(D_1+D_2)}(D_1+D_2)^2\cdot D_1\cdot D_2\cdot\overline{E}_{ii}\cdot A_{vi}\left|D_1^{\frac{1}{2}}-D_2^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$\cdot dD_1\cdot dD_2=\frac{\pi}{4}\rho A_{vi}\overline{E}_{ii}\left(\frac{1}{6A_{mi}}\right)^{\frac{7}{6}}N_i^{\frac{5}{6}}Q_i^{\frac{7}{6}}\cdot KN_{ii} \tag{39}$$

式中$KN_{ii}=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(D_1+D_2)}D_1D_2(D_1+D_2)^2\left|D_1^{\frac{1}{2}}-D_2^{\frac{1}{2}}\right|dD_1dD_2=7.703$，$\overline{E}_{ii}$是冰晶间平均碰并系数。

冰晶聚集产生雪团的速率为

$$C_{ii}=\frac{\pi}{8}\rho\int_0^\infty\int_0^\infty N_{0i}^2\,e^{-\lambda_i(D_1+D_2)}D_1\cdot D_2(D_1+D_2)^2A_{mi}(D_1^2+D_2^2)$$

$$\cdot\overline{E}_{ii}A_{vi}\left|D_1^{\frac{1}{3}}-D_2^{\frac{1}{3}}\right|dD_1dD_2=\frac{\pi}{48}\rho A_{vi}\left(\frac{1}{6A_{mi}}\right)^{\frac{7}{6}}\overline{E}_{ii}Q_i^{\frac{13}{6}}N_i^{-\frac{1}{6}}KM_{ii} \tag{40}$$

式中$KM_{ii}=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(D_1+D_2)}D_1\cdot D_2(D_1+D_2)^2(D_1^2+D_2^2)\left|D_1^{\frac{1}{3}}-D_2^{\frac{1}{3}}\right|$

$\cdot dD_1\cdot dD_2=241.6$。

冰晶聚集率同分布谱有一定关系。对于单分散的冰晶，重力碰并聚集率近似为0；冰晶越分散，聚集越强。我们另外取冰晶分布为$dN_i=N_{0i}\cdot e^{-\lambda_i D}dD$，求出$NC_{ii}'$和$C_{ii}'$。它们的表达式同（39）、（40）两式完全相似，差别仅在常系数。在同样的Q_i和N_i下，$\frac{NC_{ii}'}{NC_{ii}}=1.33$，$\frac{C_{ii}'}{C_{ii}}=2.27$。

对冰晶间的碰并系数E_{ii}研究不多，相互的差异也比较大[6n]。总的看来，E_{ii}同温度关系密切，E_{ii}在0℃附近最大，随温度下降而迅速减小，在−13℃附近有一个次大值。E_{ii}同冰晶形状有关，枝状冰晶易于聚合，这可能是造成E_{ii}在−13℃次大值的原因。从这一图象出发，根据Rogers的板状冰晶自由下落碰并实验结果，我们取

$$E_{ii}=A_1\exp[A_2(T-273)]\cdot\{1+A_3\cdot\exp[-A_4(T-259)^2]\} \tag{41}$$

式中$A_1=0.2$，$A_2=0.35$，$A_3=4$，$A_4=0.4$。

4．雪团相互碰并聚合（C_{ss}）

雪团的相互碰并过程对雪团的比水量没有作用，但改变雪团的比浓度和大小。

$$NC_{ss}=\frac{\pi}{8}\rho KN_{ii}\cdot A_{vs}\cdot\overline{E}_{ss}\left(\frac{1}{6A_{ms}}\right)^{\frac{7}{6}}\cdot N_s^{\frac{5}{6}}\cdot Q_s^{\frac{7}{6}} \tag{42}$$

式中$\overline{E}_{ss}$为雪团间的平均碰并系数，由于研究较少，我们采用$\overline{E}_{ss}=\overline{E}_{ii}$，从式（41）算出。

5．雪团碰并冰晶（C_{is}）

雪团群同冰晶群的碰并机率为

$$NC_{is}=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty \rho N_{0i}\cdot N_{0s}D_1D_2e^{-\lambda_iD_1-\lambda_sD_2}(D_1+D_2)^2\left|A_{vs}D_2^{\frac{1}{3}}-A_{vi}D_1^{\frac{1}{3}}\right|$$

$$\cdot E_{is}dD_1dD_2=\frac{\pi}{4}\rho A_{vs}\overline{E}_{is}\left(\frac{1}{6A_{ms}}\right)^{\frac{7}{6}}\cdot N_s^{-\frac{1}{6}}Q_s^{\frac{7}{6}}N_iK_{Nis}(\beta_{si}) \tag{43}$$

式中 $K_{Nis}(\beta_{si})=\int_0^\infty\int_0^\infty D_1\cdot D_2e^{-(D_1+D_2)}(D_2+\beta_{si}D_1)^2\left|D_2^{\frac{1}{3}}-\frac{A_{vi}}{A_{vs}}(\beta_{si}D_1)^{\frac{1}{3}}\right|$

$$\cdot dD_1dD_2 \tag{44}$$

$$\beta_{si}=\frac{\lambda_s}{\lambda_i}=\frac{D_i}{D_s}=\left(\frac{A_{ms}N_sQ_i}{A_{mi}N_iQ_s}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{45}$$

雪团碰并冰晶的质量转化率为

$$C_{is}=\frac{\pi}{24}\rho A_{vs}\overline{E}_{is}\left(\frac{1}{6A_{ms}}\right)^{\frac{7}{6}}N_s^{-\frac{1}{6}}Q_s^{\frac{7}{6}}Q_iK_{Mis}(\beta_{si}) \tag{46}$$

式中 $K_{Mis}(\beta_{si})=\int_0^\infty\int_0^\infty D_1^3D_2e^{-(D_1+D_2)}(D_2+\beta_{si}D_1)^2\left|D_2^{\frac{1}{3}}-\frac{A_{vi}}{A_{vs}}(\beta_{si}D_1)^{\frac{1}{3}}\right|$

$$\cdot dD_1dD_2 \tag{47}$$

我们用数值方法求出了各种 β_{si} 值下的 K_{Nis} 和 K_{Mis} 值，列于附表。β_{si} 一般在0.1—0.9的范围内变化，相应的 K_{Nis} 为7.7—9.3，K_{Mis} 为46.3—74.1。它们的变化很有规律，在用方程（43）和（46）时不必解方程（44）、（47），而用 β_{si} 值从附表内插或用经验公式。这样可以大大节省计算时间。由于雪团同冰晶的碰并系数研究较少，我们暂时取 $\overline{E}_{is}=\overline{E}_{ii}$。

附表　雪团、冰晶碰并的转化系数

β_{si}	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
K_{Nis}	7.944	7.725	7.779	7.944	8.144	8.363	8.580	8.814	9.063	9.337	
K_{Nis}*	9.255	7.079	6.920	7.328	7.574	7.883	8.184	8.488	8.767	9.029	9.255
K_{Mis}	51.34	46.33	48.63	51.34	54.03	56.99	60.04	63.77	68.36	74.10	
K_{Mis}*	55.53	48.73	54.67	61.97	69.91	78.15	86.43	94.58	102.43	109.80	116.61

在两种粒子群的碰并模拟中，过去常用群体平均落速差近似来代替粒子落速差的绝对值。这种方法对于同种粒子间的碰并显然不能用，因为平均落速差为 0 。在雪团同冰晶的碰并中，雪团落速一般比冰晶的大，所以可以考虑用平均落速差近似，下面作一比较。

雪团碰并冰晶的机率在平均落速差近似下为

$$NC_{is}^*=\frac{\pi}{4}\rho\int_0^\infty\int_0^\infty N_{0i}N_{0s}D_1D_2e^{-\lambda_iD_1-\lambda_sD_2}(D_1+D_2)^2(\overline{V}_s-\overline{V}_i)E_{is}dD_1dD_2$$

$$=\frac{\pi}{4}\rho A_{vs}\overline{E}_{is}\left(\frac{1}{6A_{ms}}\right)^{\frac{7}{6}}N_s^{-\frac{1}{6}}\cdot Q_s^{\frac{7}{6}}N_iK_{Nis}^*(\beta_{si}) \tag{48}$$

式中 $K_{Nis}^*(\beta_{si})=6\times1.54\left[1-\frac{A_{vi}}{A_{vs}}\beta_{si}^{\frac{1}{3}}\right]\left[1+\frac{4}{3}\beta_{si}+\beta_{si}^2\right]$ (49)

平均落速近似下的雪团碰并冰晶率为

$$C_{is}{}^{*}=\frac{\pi}{24}\rho A_{vs}\overline{E}_{is}\left(\frac{1}{6A_{ms}}\right)^{\frac{7}{6}}N_s^{-\frac{1}{6}}Q_s^{\frac{7}{6}}Q_iK_{M\,is}{}^{*}(\beta_{si}) \tag{50}$$

式中 $K_{M\,is}{}^{*}=36\times1.54\left[1-\frac{A_{vi}}{A_{vs}}\beta_{si}{}^{\frac{1}{3}}\right]\left[1+\frac{8}{3}\beta_{si}+\frac{10}{3}\beta_{si}^{2}\right]$ (51)

式（48）和（50）相应地同式（43）和（46）完全相似，只差常系数$K_{N\,is}$和$K_{M\,is}$。我们按式（49）和（51）求出 $K_{N\,is}{}^{*}$ 和 $K_{M\,is}{}^{*}$ 值也列于附表。从附表可见:（a）数浓度的碰并率（$K_{N\,is}$）在采用平均落速差近似时一般偏小（除冰晶特别小，即$\frac{\lambda_s}{\lambda_i}=0$外），差值在10%以内。这是由于数量占多数的小冰晶同雪团的落速差实际上比平均落速差的大，所以碰并的冰晶数也多。（b）质量碰并率（$K_{M\,is}$）在采用平均落速差近似时一般偏大，差值随 β_{si} 而增大，当冰晶和雪晶的尺度接近时，差值可达50%左右。这是由于质量占优势的大冰晶同雪团的落速差在采用平均落速差时被夸大了。

6．雨滴相互碰并和破碎（NC_{rr}）

雨滴间的相互碰并和破碎过程不影响雨水总量，只改变雨滴的浓度和大小分布。Srivastava[10] 曾在$M-P$谱假定下计算了不同 λ_r值的雨滴群通过相互碰并和破碎的数浓度变化率，综合他的结果得出：

$$NC_{rr}=4\cdot10^{-8}\rho N_{0r}^{2}[-\exp(-0.152\lambda_r)+S_r\cdot\exp(-0.23\lambda_r)] \tag{52}$$

式中 S_r为雨滴碰并破碎时的平均次生雨滴个数，$S_r=3-7$，文中取$S_r=3$。

在层状云中，上升气流较弱，在冷区很少出现雨滴，所以没有考虑雨滴同冰粒子的碰并。

7．冰核的活化（P_{vi}）

冰核在不同温度的过冷云中的活化浓度根据观测可用Fletcher[11]的方程表示之：

$$N_N=NIN\cdot\exp[BIN(273-T)]/\rho \tag{53}$$

式中 NIN和 BIN为参数。根据游来光等[12]在北京观测的结果，$NIN=6.53$，$BIN=0.342$。

过冷云中冰晶核化率为

$$NP_{vi}^{*}=\begin{cases}-BIN\cdot NIN\cdot\exp[BIN(273-T)]/\rho\cdot\dfrac{dT}{dt}, & \text{当}\dfrac{dT}{dt}<0\text{时}\\ 0, & \text{当}\dfrac{dT}{dt}\geqslant0\text{时}\end{cases} \tag{54}$$

$$\frac{dT}{dt}=w\frac{\partial T}{\partial z} \tag{55}$$

在无云空气中，水汽相对于冰面为过饱和时也有一些冰晶核化，根据Huffman(1973)[6P]的结果，$N_N=C\cdot S^K$ (56)

式中C，K为参数，S为相对于冰面的过饱和度。K按观测结果为3－8，文中取5。考虑到在水面饱和时 N_N值应同过冷云中的相等，可导出：

$$N_N=NIN\cdot\exp[BIN(273-T)]/\rho\cdot\left(\frac{Q_v-Q_{si}}{Q_{sw}-Q_{si}}\right)^{K} \tag{57}$$

$$NP_{vi}=-NIN\cdot BIN\cdot \exp[BIN(273-T)]/\rho\cdot\left(\frac{Q_v-Q_{si}}{Q_{sw}-Q_{si}}\right)^K\frac{dT}{dt} \tag{58}^*$$

无云空气中冰核的活化率对云和降水的形成演变过程有很大影响。Буйков等（1975）[3]的数值模拟结果表明，假定在水汽达到水面饱和时才用（54）式，否则 $NP_{vi}=0$，同假定在水汽达到冰面饱和时就能用（54）式相比，计算的降水过程有显著差异。显然，前者低估了实际的核化率而后者则过高估计。采用式（58）将更为合理。

冰晶核化的质量转化率为

$$P_{vi}=NP_{vi}\cdot Q_{v0} \tag{59}$$

式中 Q_{v0} 为核化产生的初生冰晶的平均质量，我们取 $Q_{v0}=10^{-10}$克。根据核化过程的不同，冰晶有的是从汽态转化的，有的是从云滴转化的。由于冰晶核化的质量转化率很小，水汽和云滴之间又有很快的凝结蒸发过程的调节，所以我们把冰晶核化质量全部从汽态中扣除。

8．冰晶繁生（P_{ci}）

冰晶繁生过程主要的可能有三种：（a）冰晶破碎，这同形状等有关；（b）大水滴冻结破碎，这在层状云中重要性较小；（c）凇附繁生。模式只考虑了研究比较多、估计比较重要的凇附繁生过程。据Mossop等[13]的实验结果，落速为1.4—3米/秒的霰粒在－5℃温度下同水滴碰并凇附，增加的次生冰晶数约为碰并的直径大于24微米的大云滴数的1/250。在－3——8℃温度区间内也观测到次生冰晶，但数量较少。我们在层状冷云模式中[2]未区别冰粒子的种类，在－3——8℃区间内也没有区别其繁生速率，所以可能过高估计了这一过程。本模式取

$$NP_{ci}=\frac{A(T)}{250}\cdot\int_0^\infty N_{0g}e^{-\lambda_g D_g}\cdot\frac{\pi}{4}D_g^2A_{vg}D_g^{0.8}E\rho\int_{D_2^*}^\infty N_{0c}\cdot D_c^2\cdot e^{-\lambda_c D_c}dD_c dD_g$$

$$=\frac{A(T)}{250}C_{cg}\frac{N_c}{Q_c}\cdot\exp(-\beta_2)\left(1+\beta_2+\frac{1}{2}\beta_2^2\right) \tag{60}$$

式中

$$A(T)=\begin{cases}0, & \text{当}T>270\ K\text{或}T<265\ K\text{时}\\ 1-\frac{1}{4}(T-268)^2, & \text{当}270>T>268\ K\text{时}\\ 1-\frac{1}{9}(T-268)^2, & \text{当}268>T>265\ K\text{时}\end{cases} \tag{61}$$

$$\beta_2=\lambda_c\cdot D_2^*=(10\rho_w\pi\cdot N_c)^{\frac{1}{3}}Q_c^{-\frac{1}{3}}\times 0.0024 \tag{62}$$

次生冰晶的质量产生率为

$$P_{ci}=NP_{ci}\cdot Q_{c0} \tag{63}$$

---

* 更一般的形式应为：

$$NP_{vi}=NIN\cdot\exp[BIN(273-T)]/\rho\cdot\left[-\sigma_1\cdot BIN\frac{dT}{dt}\cdot f^k+\sigma_2 kf^{k-1}\frac{df}{dt}\right] \tag{58a}$$

式中 $f=\frac{Q_v-Q_{si}}{Q_{sw}-Q_{si}}$，$\frac{df}{dt}=w\frac{\partial f}{\partial z}$，

$$\sigma_1=\begin{cases}0, & \text{当}\frac{dT}{dt}\geqslant 0\text{时}\\ 1, & \text{当}\frac{dT}{dt}<0\text{时}\end{cases}\qquad \sigma_2=\begin{cases}0, & \text{当}Q_c>0\text{或}\frac{df}{dt}\leqslant 0\text{时}\\ 1, & \text{当}Q_c=0\ \ \frac{df}{dt}>0\text{时}\end{cases}$$

式中Q_{c0}为次生冰晶的平均质量，我们取$Q_{c0}=10^{-9}$克。P_{ci}很小，我们作为是从云滴转化的。

9．云滴自动转化为雨滴（A_{cr}）

云滴群通过凝结、碰并等过程增长，滴谱拓宽，最后产生雨滴。从目前的研究结果看，在这一过程中随机重力碰并相当重要，数值模拟（如Berry 1968）[14]得出了同实际比较一致的结果。据此，我们曾推出下述表达式，并在层状暖云和暖积云降水模拟中[1][15][16]得到了同实际相近似的结果。

$$A_{cr}=\begin{cases}0, & \text{当}F_c\leqslant 1\text{时}\\ \dfrac{J_1\cdot\rho^2\cdot Q_c^3}{360\cdot\rho Q_c+1.20N_c/D_c}, & \text{当}F_c>1\text{时}\end{cases}\tag{64}$$

式中J_1取0.25，D_c为云滴谱初始离散度，F_c为云滴谱拓宽度，在一维模式中从下式算出：

$$\frac{\partial F_c}{\partial t}=-\overline{w}\frac{\partial F_c}{\partial z}+K\frac{\partial^2 F_c}{\partial z^2}+\frac{\rho^2 Q_c^2}{120\rho Q_c+1.6N_c/D_c}\tag{65}$$

雨滴浓度转化率取

$$NA_{cr}=A_{cr}/Q_{r0}\tag{66}$$

式中Q_{r0}为初生雨滴的平均质量，模式中取$Q_{r0}=5\cdot10^{-7}$克。

10．冰晶（雪团）转化为霰（A_{ig}，A_{sg}）

当冰晶（雪团）撞冻大量云滴后其外部转化为球状，即成为霰。我们用F_i（F_s）来表征冰晶（雪团）的凇附率，它们是冰晶（雪团）中撞冻的水滴量同整个质量之比。可从下式算出。

$$\frac{\partial F_i}{\partial t}=-(\overline{w}-\overline{V}_i)\frac{\partial F_i}{\partial z}+K\frac{\partial^2 F_i}{\partial z^2}+\left(\frac{F_iQ_i+C_{ci}\cdot\delta t}{Q_i+(C_{ci}+S_{vi})\delta t}-F_i\right)\Big/\delta t\tag{67}$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial t}=-(\overline{w}-\overline{V}_s)\frac{\partial F_s}{\partial z}+K\frac{\partial^2 F_s}{\partial z^2}+\left\{\frac{F_sQ_s+[C_{cs}+F_i\cdot(C_{ii}+C_{is})]\delta t}{Q_s+(C_{cs}+C_{ii}+C_{is}+S_{vs})\delta t}-F_s\right\}\Big/\delta t\tag{68}$$

从物理上考虑，当凇附率$F_i(F_s)\geqslant0.8$时，冰晶（雪团）应迅速转化为霰。我们不采用瞬时转化的方式而用$F_i(F_s)$的大小来控制转化速率，取

$$A_{ig}=\exp[18\cdot(F_i-1)]\frac{Q_i}{10}\tag{69}$$

$$A_{sg}=\frac{Q_s}{10}\exp[18\cdot(F_s-1)]\tag{70}$$

浓度转化率为

$$NA_{ig}=\frac{N_i}{10}\exp[18\cdot(F_i-1)]\tag{71}$$

$$NA_{sg}=\frac{N_s}{10}\exp[18\cdot(F_s-1)]\tag{72}$$

11．雨滴的凝结蒸发（S_{vr}）

根据单个水滴的蒸发凝结率[8e]可以推出雨滴群的凝结蒸发率为

$$S_{vr}=2\pi K_D\rho(Q_v-Q_{sw})\left[1+\frac{L_vK_D\rho Q_{sw}}{K_T\cdot T}\left(\frac{L_v}{RT}-1\right)\right]^{-1}\cdot\int_0^{\infty}N_{0r}e^{-\lambda_r D}D$$

$$\cdot(1+0.23R_e^{\frac{1}{2}})dD=2\pi K_D\rho(Q_v-Q_{sw})\left[1+\frac{L_vK_D\rho Q_{sw}}{K_T\cdot T}\left(\frac{L_v}{RT}-1\right)\right]^{-1}$$

$$\cdot\left[N_r^{\frac{2}{3}}Q_r^{\frac{1}{3}}(6\cdot A_{mr})^{-\frac{1}{3}}+0.23\Gamma(2.9)\cdot\sqrt{\frac{\rho A_{vr}}{\mu}}\cdot N_r^{\frac{1.1}{3}}Q_r^{\frac{1.9}{3}}\right.$$

$$\left.\cdot(6\cdot A_{mr})^{-\frac{1.9}{3}}\right] \tag{73}$$

式中K_D、K_T、μ为空气中的水汽扩散系数、导热系数和动力学粘性系数，都是温度的函数。

$$K_D=2.25\cdot10^{-5}\cdot[1+0.0062(T-273)]\qquad(米^2\cdot秒^{-1}) \tag{74}$$

$$K_T=2.40\cdot10^{-2}\cdot[1+0.0033(T-273)]\qquad(焦耳\cdot米^{-1}\cdot秒^{-1}\cdot度^{-1}) \tag{75}$$

$$\mu=1.72\cdot10^{-5}\cdot[1+0.0029(T-273)]\qquad(牛顿\cdot秒\cdot米^{-2}) \tag{76}$$

雨滴数浓度的变化：在凝结时浓度不变，在蒸发时小雨滴减少。我们简单地取

$$NS_{vr}=\begin{cases}0, & 当S_{vr}\geqslant0时\\ S_{vr}\cdot N_r/Q_r, & 当S_{vr}<0时\end{cases} \tag{77}$$

12．霰粒的凝华和蒸发（S_{vg}）

同雨滴相似可以推出霰的凝华率为

$$S_{vg}=2\pi K_D\rho(Q_v-Q_{si})\left[1+\frac{L_vK_D\rho Q_{si}}{K_T\cdot T}\left(\frac{L_v}{RT}-1\right)\right]^{-1}\left[N_g^{\frac{2}{3}}\cdot Q_g^{\frac{1}{3}}\cdot(6\cdot A_{mg})^{-\frac{1}{3}}\right.$$

$$\left.+0.23\sqrt{\frac{\rho A_{vg}}{\mu}}\Gamma(2.9)N_g^{\frac{1.1}{3}}Q_g^{\frac{1.9}{3}}(6\cdot A_{mg})^{-\frac{1.9}{3}}\right]$$

$$=2\pi K_D\rho(Q_v-Q_{si})\left[1+\frac{L_vK_D\rho Q_{si}}{K_TT}\left(\frac{L_v}{RT}-1\right)\right]^{-1}N_g(6A_{mg}N_g/Q_g)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\cdot\left[1+0.23\sqrt{\frac{\rho A_{vg}}{\mu}}\Gamma(2.9)\cdot(6A_{mg}N_g/Q_g)^{-0.3}\right] \tag{78}$$

数浓度的变化率为

$$NS_{vg}=\begin{cases}0, & 当S_{vg}\geqslant0时\\ S_{vg}\cdot N_g/Q_g, & 当S_{vg}<0时\end{cases} \tag{79}$$

13．冰晶的凝华蒸发（S_{vi}）

冰晶的凝华率同它的形状和温度有关，Koenig（1972）[17]提出了在水面饱和条件下单个冰晶凝华增长率的参数化方程如下：

$$\frac{dm_i}{dt}=a_1\cdot m_i^{a_2} \tag{80}$$

式中m_i为单个冰晶的质量，a_1、a_2为参数，是温度的函数。据此推出在水汽为Q_v时的冰晶群的凝华率为：

$$S_{vi}=\Gamma(2+2\cdot a_2)\cdot a_1\cdot N_i^{(1-a_2)}\cdot Q_i^{a_2}\cdot 6^{-a_2}\frac{Q_v-Q_{si}}{Q_{sw}-Q_{si}} \tag{81}$$

式中$\Gamma(2+2\cdot a_2)\cong 2$，因为$a_2=0.5$。

$$S_{vi}\cong 2\cdot a_1\cdot N_i(6N_i/Q_i)^{-a_2}\frac{Q_v-Q_{si}}{Q_{sw}-Q_{si}} \tag{81a}$$

数浓度变化率为

$$NS_{vi}=\left\{\begin{array}{ll}0 & ，当S_{vi}\geqslant 0时\\ S_{vi}\cdot N_i/Q_i， & 当S_{vi}<0时\end{array}\right\} \tag{82}$$

14. 雪团的凝华蒸发（S_{vs}）

雪团的凝华蒸发可以近似于同直径的冰晶：

$$S_{vs}=2\cdot a_1\cdot N_s^{(1-a_2)}Q_s^{a_2}\cdot 6^{-a_2}\frac{Q_v-Q_{si}}{Q_{sw}-Q_{si}}$$

$$=2a_1\cdot N_s(6\cdot N_s/Q_s)^{-a_2}\frac{Q_v-Q_{si}}{Q_{sw}-Q_{si}} \tag{83}$$

也可以近似于同直径的冰球：

$$S_{vs}=2\pi K_D\rho(Q_v-Q_{si})\left[1+\frac{L_vK_D\rho Q_{si}}{K_TT}\left(\frac{L_v}{RT}-1\right)\right]^{-1}$$

$$\cdot\left[2N_s^{\frac{1}{2}}Q_s^{\frac{1}{2}}(6A_{ms})^{-\frac{1}{2}}+0.23\Gamma(3.67)Q_s^{\frac{5}{6}}N_s^{\frac{1}{6}}(6A_{ms})^{-\frac{5}{6}}\sqrt{\frac{A_{vs}\cdot\rho}{\mu}}\right]$$

$$=2\pi K_D\rho(Q_v-Q_{si})\left[1+\frac{L_vK_D\rho Q_{si}}{K_TT}\left(\frac{L_v}{RT}-1\right)\right]^{-1}\cdot N_s$$

$$\cdot(6A_{ms}\cdot N_s/Q_s)^{-\frac{1}{2}}\left[2+0.23\Gamma(3.67)\cdot(6A_{ms}N_s/Q_s)^{-\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{A_{vs}\cdot\rho}{\mu}}\right] \tag{84}$$

本文中采用式（83）。数浓度的变化为

$$NS_{vs}=\left\{\begin{array}{ll}0 & ，当S_{vs}\geqslant 0时\\ S_{vs}\cdot N_s/Q_s， & 当S_{vs}<0时\end{array}\right\} \tag{85}$$

15. 云滴凝结蒸发率（S_{vc}）

根据单个水滴的凝结率可以推出云滴群的凝结率为

$$S_{vc}=2\pi K_D\rho(Q_v-Q_{sw})\left[1+\frac{L_vK_D\rho Q_{sw}}{K_TT}\left(\frac{L_v}{RT}-1\right)\right]^{-1}\cdot\int_0^\infty N_{0c}D^2e^{-\lambda_cD}\,dD$$

$$=6\pi K_D\rho(Q_v-Q_{sw})\left[1+\frac{L_vK_D\rho Q_{sw}}{K_TT}\left(\frac{L_v}{RT}-1\right)\right]^{-1}\cdot N_c^{\frac{2}{3}}\cdot Q_c^{\frac{1}{3}}$$

$$\cdot(10\cdot\pi)^{-\frac{1}{3}}=6\pi K_D\rho(Q_v-Q_{sw})\left[1+\frac{L_vK_D\rho Q_{sw}}{K_TT}\left(\frac{L_v}{RT}-1\right)\right]^{-1}$$

$$\cdot N_c(10\pi N_c/Q_c)^{-\frac{1}{3}} \tag{86}$$

它的形式同雨滴和霰的凝结率相似，但云滴浓度 N_c为10^8/千克的量级比雨滴浓度大5个量级，所以云滴群的凝结蒸发率比一般降水的大 3 个数量级。用典型值代入式（86）得

$$S_{vc}=\frac{\delta Q_c}{\delta t}=\frac{-\delta Q_v}{\delta t}=0.5(Q_v-Q_{sw})\cdot Q_c^{\frac{1}{3}} \tag{87}$$

如果假定 Q_{sw}为定值，则对凝结过程

$$\delta(Q_v-Q_{sw})=0.5(Q_v-Q_{sw})Q_c^{\frac{1}{3}}\ \delta t \tag{87a}$$

弛豫时间$t^*=2\cdot Q_c^{-\frac{1}{3}}$。如果考虑凝结潜热的作用，则

$$\delta(Q_v-Q_{sw})=0.5(Q_v-Q_{sw})\left(1+\frac{L_v^2Q_{sw}}{RT^2}\right)^{-1}Q_c^{\frac{1}{3}}\delta t=0.7Q_c^{\frac{1}{3}}\ \delta t \tag{87b}$$

弛豫时间$t^*=1.4\cdot Q_c^{-\frac{1}{3}}$。云滴比水量一般为$10^{-2}$—$10^0$克/千克，相应的$t^*=10$— 2 秒。所以在使用式（87）时必须采用较短的时间步长，以保证计算的稳定性。

云滴群的凝结率很大，能在很短的时间里将云中供应的可凝结水汽转化为云滴或者在云中水汽不饱和时将云滴转化为水汽。由于云中可凝结水汽量的供应有限，所以在定常时水汽过饱和值（Q_v-Q_{sw}）一般很小。冰晶凝华过程则不同，它的数浓度较小，弛豫时间较长，所以定常时水汽可处于很高的冰面饱和值（Q_v-Q_{si}）。在很多积云模式中采用了瞬时凝结近似，即

$$S_{vc}=(Q_v-Q_{sw})/Dt \tag{88}$$

在升速较小的暖云中，由于过饱和值很小，弛豫时间又短，采用式（88）估计不会造成很大的误差，计算则可大大简化。在冷云中，冰粒子的浓度很小(～10^3/千克)，在同样的过饱和度下，凝结率比云滴群小 2 个数量级。在三相并存的状态下，冰面的过饱和值（Q_v-Q_{si}）约比水面欠饱和值（$Q_{sw}-Q_v$）大 2 个数量级，从而保持水分的平衡。在这种情况下采用瞬时凝结近似不能精确地描述伯杰龙过程，而必须采用式（86）。

式（86）没有考虑凝结核化过程，所以在初始凝结时$Q_c=0$，$S_{vc}=0$，不能开始凝结。对于云凝结核的作用，我们简单地假定：

$$\text{当 } Q_v>Q_{sw},\quad Q_c=\max\{10^{-9},\ Q_c\} \tag{89}$$

即当$Q_c<10^{-9}$时，取$Q_c=10^{-9}$作为初始凝结核的相当比水量。

本节导出的各种微物理过程转化率代入式（17—26），再加上式（65—68），即可求出各种微物理特征量的源汇项$\frac{\delta M}{\delta t}$。在融化区还用式（27—29）计算融化过程。最后从式（16）可以求出它们的局地变化$\frac{\partial M}{\partial t}$。

三、模 式 的 校 验

P. V. Hobbs在美国华盛顿州对中纬度气旋云和降水的中尺度和微尺度结构作了系统探测[18,19]。我们用他的资料对本文微物理模式作了初步校验。考虑到层状云水平的相对均一

性，用一维时变模式来模拟。式（16）具有下列形式：

$$\frac{\partial M}{\partial t}=-w\frac{\partial M}{\partial z}+K\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho \overline{V}_m M}{\partial z}+\frac{\delta M}{\delta t}$$

$$=-(w-\overline{V}_m)\frac{\partial M}{\partial z}+K\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}+\frac{M}{\rho}\frac{\partial \rho \overline{V}_m}{\partial z}+\frac{\delta M}{\delta t} \qquad (90)$$

气流垂直速度（w）和温度（T）随高度的分布是用飞机和多普勒雷达实测值，并假定随时间不变。初始状态为云层中水汽刚达到饱和，无任何粒子。计算了暖区雨带，冷锋雨带1、2，薄暖云，暖锋雨带13日、14日等6个例子。计算的微物理特征量达到基本稳定时的垂直剖面同实测结果作了对比。结果各例的降水含量及其垂直分布基本相符。粒子浓度垂直分布除最后两例外基本相符。粒子形态的垂直分布除第5例外基本相符。模式还指出了各种微物理过程在各例中所起的作用（详见将发表的“中纬度气旋云系微物理过程的数值模拟”）。这说明本文模式在一定程度上能够描述各种宏观条件下层状云降水的微物理过程。模式的计算量较小，一维模式模拟云发展8个小时仅需108－乙机40分钟计算。云的微物理过程十分复杂，模式考虑的仅仅是最基本的方面，一些重要特征（如冰晶形状）和重要过程（如冰晶破碎繁生）都没有考虑，层状云动力学方面更为粗糙，这都有待于改进。

（本文参考文献[1—19]列于《层状云微物理过程的数值模拟（二）》文末。）

NUMERICAL SIMULATION OF MICROPHYSICAL PROCESSES IN STRATIFORM CLOUDS (I)
——MICROPHYSICAL MODEL

Hu Zhijin Yan Caifan
(Institute of Weather Modification, A.M.S.)

A comprehensive parameterized model of microphysical processes in stratiform clouds is presented. The transformation rates of the specific water contents and specific concentration of the cloud droplets, rain drops, ice crystals, snow flakes, graupels are deduced based on theoritical and experimental results for 18 microphysical processes, which include condensation, deposition, evaporation, coalescence, riming, aggregation, nucleation and multiplication of ice crystals and autoconversions of cloud-rain, ice-graupel and snow-graupel.