

对流层下部雨滴谱分布

严采繁 陈万奎

(国家气象局气象科学研究所)

提 要

本文讨论了 $\Gamma(D)$ 函数 $n(D) = AD^\alpha e^{-\lambda D}$ 一阶、二阶、三阶原点矩与分布参数 λ, α 的关系。得出由实测雨滴谱算术平均直径 D_1 、均方根直径 D_2 、均立方根直径 D_3 的比值 $k_1 = D_1/D_2, k_2 = D_2/D_3$ 求取 α 的关系, 进而可求出 $\Gamma(D)$ 函数的其它参数 A, λ 。

通过机载二维降水粒子探头 (2D-P) 获得的空中雨滴谱资料计算表明: 由 k_1, k_2 求得的参数 α_1, α_2 多数是接近的, 可以用一个介于 $\alpha_1 \sim \alpha_2$ 的值 α 来近似。本文选取 $\alpha = 2$ 对实测值进行拟合, 并和广泛采用的 Marshal-Palmer 公式 ($\alpha = 0$) 进行了比较。结果表明: 用 $\alpha = 2$ 拟合不仅相关系数 R 、相关显著水平 K 较 $\alpha = 0$ 拟合的对应值有明显提高, 而且拟合的特征值, 如 D_1, D_2, D_3 、雨水含量 Q 、雷达反射率因子 Z 都更接近于实测值, 即用三参数 (A, α, λ) 来表征雨滴谱比双参数 (A, λ) 要精确得多。

一、引 言

大气降水中的雨滴是指直径 $D \geq 0.5\text{mm}$ 的水滴, 直径介于 $0.1 \sim 0.5\text{mm}$ 的水滴称作毛毛雨滴^[1]。考虑到 2D-P 探头测量下限为 $D_0 = 0.14\text{mm}$, 以及国内地面雨滴谱的测量下限为 0.2mm , 本文将 $D \geq 0.14\text{mm}$ 的水滴统称为雨滴。雨滴数密度 $n(D_i)$ [$\text{m}^{-3} \cdot \mu\text{m}^{-1}$] 一般随直径 D 增大而减小, 其分布形式可用不同经验公式拟合^[2]。Marshal-Palmer 公式被广泛采用。

计算表明: 用双参数 A_0, λ_0 不能很好拟合实测值, 必须引入第三参数 $\alpha (\alpha \neq 0)$, 本文提出由比值 $k_1 = D_1/D_2, k_2 = D_2/D_3$ 求取 α 值的方法, 一旦求出 α , 就能方便地求出参数 A, λ , 免去了依次给定 α 值进行回归的繁琐计算, 而且实测谱的不同 α 值更能反映降水过程和降水地域特征。

二、计算方法

若雨滴尺度谱分布为 $\Gamma(D)$ 函数 $n(D) = AD^\alpha e^{-\lambda D}$ ^[4] 在 $0 \sim \infty$ 区间内连续, 则其特征值和 A, λ, α 有关, 比值 k_1, k_2 仅与 α 有关。

$$N = \int_0^\infty AD^\alpha e^{-\lambda D} dD = \frac{A}{\lambda^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha + 1) \quad (1)$$

$$D_1 = \frac{1}{N} \int_0^\infty AD^{\alpha+1} e^{-\lambda D} dD = \frac{1}{\lambda} (\alpha + 1) \quad (2)$$

$$D_2 = \left[\frac{1}{N} \int_0^\infty AD^{\alpha+2} e^{-\lambda D} dD \right]^{1/2} = \frac{1}{\lambda} [(\alpha + 1)(\alpha + 2)]^{1/2} \quad (3)$$

$$D_3 = \left[\frac{1}{N} \int_0^\infty AD^{\alpha+3} e^{-\lambda D} dD \right]^{1/3} = \frac{1}{\lambda} [(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)]^{1/3} \quad (4)$$

$$k_1 = D_1/D_2 = (\alpha + 1)/[(\alpha + 1)(\alpha + 2)]^{1/2} \quad (5)$$

$$k_2 = D_2/D_3 = [(\alpha + 1)(\alpha + 2)]^{1/2}/[(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)]^{1/3} \quad (6)$$

然而,实测雨滴谱是离散型分布,直径变化区间为 $D_0 \sim D_M$, D_M 一般比 D_0 大几倍至几十倍,数密度 $n(D)$ 随 D 增大而减小很快,因而变化区间可用 $D_0 \sim \infty$ 近似替代,在此区间,特征值和比值还与 D_0 有关.与(1)~(6)式对应,有:

$$N' = \frac{A}{\lambda} e^{-\lambda D_0} G \quad (7)$$

$$D_1' = \sum_{p=0}^{\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha + 2 - p)} \cdot \frac{D_0^{\alpha+1-p}}{\lambda^p} / G \quad (8)$$

$$D_2' = \left[\sum_{p=0}^{\alpha+2} \frac{\Gamma(\alpha + 3)}{\Gamma(\alpha + 3 - p)} \cdot \frac{D_0^{\alpha+2-p}}{\lambda^p} / G \right]^{1/2} \quad (9)$$

$$D_3' = \left[\sum_{p=0}^{\alpha+3} \frac{\Gamma(\alpha + 4)}{\Gamma(\alpha + 4 - p)} \cdot \frac{D_0^{\alpha+3-p}}{\lambda^p} / G \right]^{1/3} \quad (10)$$

式中

$$G = \sum_{p=0}^{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - p)} \frac{D_0^{\alpha-p}}{\lambda^p}$$

$$k_1' = D_1' / D_2' \quad (11)$$

$$k_2' = D_2' / D_3' \quad (12)$$

由 k_1' 和 k_2' 值求取 α 很困难,计算表明:在 α 值较大时, k_1' 、 k_2' 和 k_1 、 k_2 相当接近,若 $\alpha=2$, k_1' 与 k_1 的相对百分误差为 10%,而当 $\alpha=4$ 时,百分误差仅为 3%。因此,可用 k_1' 替代 k_1 由(5)式求得大于或等于零的 α_1 值.同理,由 k_2' 和(6)式求取 α_2 值. k_1' 、 k_1 与 α 的关系绘于图1。

由于实测雨滴谱并非都符合 $\Gamma(D)$ 分布,因而由 k_1' 、 k_2' 求出的 α_1 、 α_2 值,一般并不相等,其差值 $\Delta\alpha = |\alpha_1 - \alpha_2|$ 越小,实测谱越接近 $\Gamma(D)$ 分布.计算表明, α_1 与 α_2 多数接近,差值 $\Delta\alpha$ 分布列于表1。

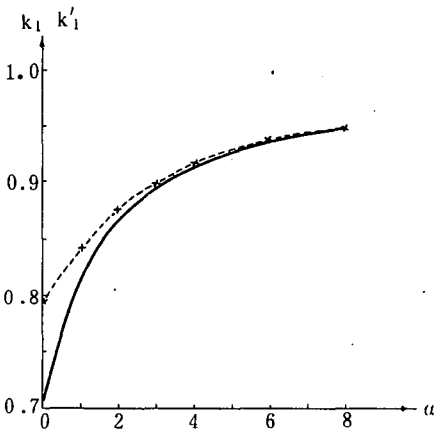


图1 k_1' 、 k_1 与 α 值关系
虚线为 $k_1' \sim \alpha$; 实线为 $k_1 \sim \alpha$

表1 $\Delta\alpha$ 出现频率

$\Delta\alpha$	0~0.5	0.6~1.0	1.1~2.0	2.1~4.0	4.1~10	合计
出现次数	86	41	20	3	1	151
百分频率(%)	56.95	27.15	13.25	1.99	0.66	100.00

$\Delta\alpha$ 趋于0时,最佳拟合值(即拟合值与实测值相对百分误差为极小值或低值,相关系数为最大值)出现在 $\alpha_1 = \alpha_2$ 处。表2列出了它的拟合结果,可清楚看出相关系数 R 是最大值, $\Delta N/N$ 、 $\Delta D_3/D_3$ 是低值, $\Delta D_1/D_1$ 、 $\Delta D_2/D_2$ 和 $\Delta Q/Q$ 是极小值。

当 $\alpha \geq 5$, $\Delta\alpha \geq 2$ 时,不存在最佳拟合值,较好拟合值(拟合值与实测值相对百分误差是低值或较小值)出现在 $\alpha_1 \sim \alpha_2$ 间或 α_1 、 α_2 附近。表3所列是 $\alpha_1 = 5.0$, $\alpha_2 = 7.0$ 的拟合结果,较好拟合值出现在 $\alpha = 2 \sim 6$ 之间。

表2 $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ 拟合结果

α	R	百分误差(%)				
		$\Delta N/N$	$\Delta D_1/D_1$	$\Delta D_2/D_2$	$\Delta D_3/D_3$	$\Delta Q/Q$
0	-0.951	0.81	11.26	3.51	4.85	16.44
1	-0.987	3.25	4.35	1.69	1.50	1.37
2	-0.991	2.09	1.95	0.78	0.90	0.69
3	-0.989	5.46	6.45	2.73	0.80	7.53
4	-0.986	16.63	9.91	4.02	0.80	18.49

表3 $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 7$ 时不同 α 值的拟合结果

α	R	百分误差(%)				
		$\Delta N/N$	$\Delta D_1/D_1$	$\Delta D_2/D_2$	$\Delta D_3/D_3$	$\Delta Q/Q$
0	-0.625	5.43	13.22	33.16	55.20	253.19
1	-0.881	10.87	0.54	8.75	19.52	51.06
2	-0.959	11.14	4.89	0.17	6.72	8.51
3	-0.984	8.15	6.52	3.70	0.48	6.38
4	-0.993	1.90	8.32	6.73	3.68	12.76
5	-0.996	2.72	8.15	7.74	6.08	14.89
6	-0.997	12.50	7.97	8.58	7.68	10.64
7	-0.996	22.55	7.97	9.26	8.96	6.38
8	-0.995	34.78	7.97	9.76	9.92	2.13

三、资料处理和计算结果

实测雨滴谱并不都是从小到大连续分布的,特别是较大雨滴因碰并等多种原因偶然出现,成为由小一中雨滴组成的稳定连续的离散谱,这种大滴浓度小,对粒子总浓度影响不大,但对特征尺度、雨水含量、雨强、雷达反射因子及谱分布参数 λ 影响较大。为了讨论

稳定连续谱基本特征,本文不计间断的离散谱;考虑到飞机飞行姿态对2D-P测量的影响和水滴变形^[6],将和连续谱间隔不超过0.4mm的雨滴计入连续谱。

此外,考虑到雨滴空间、地域分布的代表性,分别选取了西安水平观测资料89份和呼和浩特垂直探测资料62份,求出 k_1 、 k_2 ,进而计算 α_1 和 α_2 值。对于不同谱型, α_1 、 α_2 值不同,为了便于比较和实际应用,选取了 α_1 、 α_2 较多出现的值($\alpha=2$)进行回归,再求取 A_2 、 λ_2 ,并和常用的M-P公式进行了比较。

1. 相关系数 R

对实测资料 $n(D_i)$ 分别按M-P公式和 $n(D_i) = A_2 D_i^2 e^{-\lambda_2 D_i}$ 求取 $n(D)$ 与 D 相关系数 R_0 、 R_2 ,并对 R_0 、 R_2 进行相关显著水平检验^[6]。结果如下:用 $\alpha=2$ 拟合,相关系数全部大于0.80,其中93.38%在0.96以上,而用 $\alpha=0$ 拟合,则大多(88.74%)在0.95以下,只有11.26%大于0.96。相关显著水平 $K < 0.01$ 的, $\alpha=2$ 高达90.73%,而 $\alpha=0$ 仅为51.66%;而 $K > 0.1$ 的, $\alpha=2$ 没有出现, $\alpha=0$ 却高达21.85%。

2. 雨滴数浓度 N

实测数浓度以 N 表示,则拟合的数浓度由(7)式可得:

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda_0} e^{-\lambda_0 D_0}$$

$$N_2 = \frac{A_2}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 D_0} \left(D_0^3 + \frac{2D_0}{\lambda_2} + \frac{2}{\lambda_2^2} \right)$$

式中 A_0 、 λ_0 、 A_2 和 λ_2 分别为 $\alpha=0$ 、 $\alpha=2$ 的 $\Gamma(D)$ 函数分布参数。 N_0 、 N_2 与 N 的相对百分误差为:

$$f_\alpha(N) = |N - N_\alpha| / N \quad (\alpha = 0, 2)$$

$f_0(N)$ 、 $f_2(N)$ 的频率分布列于表4。

从表4得出:在相对百分率0~5%时, $f_0(N)$ 比 $f_2(N)$ 高出11.26%,即用 $\alpha=0$ 拟合好一些。但在5~15%范围内, $f_2(N)$ 比 $f_0(N)$ 高出16.56%,即在此相对百分误差下,用 $\alpha=2$ 拟合更好些。在0~15%范围, $f_2(N)$ 和 $f_0(N)$ 各为90.73%和85.43%,用 $\alpha=2$ 仍优于 $\alpha=0$ 。值得指出的是用 $\alpha=0$ 或 $\alpha=2$ 拟合数浓度,结果都较好,当相对百分误差在15%以下时,百分频率均已达85%以上。

3. 特征尺度 D

常用的雨滴谱特征尺度是算术平均直径、均方根直径、均立方根直径。对于实测谱,以 D_1 、 D_2 、 D_3 表示。拟合的相应特征尺度由(8)~(10)式可得:

$$\text{当 } \alpha = 0 \quad D_1 = D_0 + \frac{1}{\lambda_0}$$

$$D_2 = \left(D_0^3 + \frac{2D_0}{\lambda_0} + \frac{2}{\lambda_0^2} \right)^{1/2}$$

$$D_3 = \left(D_0^3 + \frac{3D_0^2}{\lambda_0} + \frac{6D_0}{\lambda_0^2} + \frac{6}{\lambda_0^3} \right)^{1/3}$$

当 $\alpha = 2$

$$D_1 = (D_0^3 + \frac{3D_0^2}{\lambda_2} + \frac{6D_0}{\lambda_2^2} + \frac{6}{\lambda_2^3})/H$$

$$D_2 = [(D_0^4 + \frac{4D_0^3}{\lambda_2} + \frac{12D_0^2}{\lambda_2^2} + \frac{24D_0}{\lambda_2^3} + \frac{24}{\lambda_2^4})/H]^{1/2}$$

$$D_3 = [(D_0^5 + \frac{5D_0^4}{\lambda_2} + \frac{20D_0^3}{\lambda_2^2} + \frac{60D_0^2}{\lambda_2^3} + \frac{120D_0}{\lambda_2^4} + \frac{120}{\lambda_2^5})/H]^{1/5}$$

式中 $H = D_0^2 + \frac{2D_0}{\lambda_2} + \frac{2}{\lambda_2^2}$ 。

拟合值与实测值的相对百分误差 $f_0(D_1)$ 、 $f_0(D_2)$ 、 $f_0(D_3)$ 、 $f_2(D_1)$ 、 $f_2(D_2)$ 、 $f_2(D_3)$ 列于表 4。

表 4 各特征值百分误差的频率分布

f	α	频 率	误差范围 (%)								合计
			0~5	5~10	10~15	15~20	20~30	30~50	50~70	>70	
f(N)	0	出现次数	70	37	22	7	9	3	1	2	151
		%	46.36	24.50	14.57	4.64	5.96	1.99	0.66	1.32	100.00
	2	出现次数	53	48	36	6	6	1	1	0	151
		%	35.10	31.79	23.84	3.97	3.97	0.66	0.66	0	99.99
f(D ₁)	0	出现次数	19	33	33	23	28	5	4	6	151
		%	12.58	21.85	21.85	15.23	18.54	3.31	2.65	3.97	99.98
	2	出现次数	63	39	19	19	8	3	0	0	151
		%	41.72	25.83	12.58	12.58	5.30	1.99	0	0	100.00
f(D ₂)	0	出现次数	33	36	24	16	13	13	4	12	151
		%	21.85	23.84	15.89	10.60	8.61	8.61	2.65	7.95	100.00
	2	出现次数	69	42	27	11	0	2	0	0	151
		%	45.70	27.81	17.88	7.28	0	1.32	0	0	99.99
f(D ₃)	0	出现次数	34	24	11	19	17	20	9	17	151
		%	22.52	15.89	7.28	12.58	11.26	13.25	5.96	11.26	100.00
	2	出现次数	64	51	28	4	3	0	1	0	151
		%	42.38	33.77	18.54	2.65	1.99	0	0.66	0	99.99
f(Q)	0	出现次数	12	13	14	7	17	17	14	57	151
		%	7.95	8.61	9.27	4.64	11.26	11.26	9.27	37.75	100.01
	2	出现次数	26	26	17	24	21	29	3	5	151
		%	17.22	17.22	11.26	15.89	13.91	19.21	1.99	3.31	100.01

由表可得出:相对误差在5%以下时, $\alpha=2$ 比 $\alpha=0$ 的百分频率明显提高: $f(D_1)$ 提高29.14%, $f(D_2)$ 提高23.85%, $f(D_3)$ 则提高了19.86%。在相对误差为10%以下时, $\alpha=2$ 比 $\alpha=0$ 提高更为显著, $f(D_1)$ 、 $f(D_2)$ 、 $f(D_3)$ 依次提高33.12%、27.82%和37.74%,即用 $\alpha=2$ 拟合实测特征尺度比 $\alpha=0$ 要好得多。

4. 雨水含量 Q

若实测雨水含量 $Q = \frac{\pi}{6}ND^3\rho$, 则拟合的雨水含量为:

$$Q_a = \frac{\pi}{6}N_a D_{3a}^3 \rho \quad (a = 0, 2)$$

与实测值相对百分误差分别记为 $f_0(Q)$ 、 $f_2(Q)$, 其频率分布列于表4。

从表4可见, 在相对误差小于50%时, $f_2(Q)$ 均明显高于 $f_0(Q)$, 其中, 0~15%范围内高出19.87%, 15~50%高出21.85%, 而当相对误差范围大于50%时, $f_0(Q)$ 比 $f_2(Q)$ 高出了41.72%, 可见, 用 $a=2$ 拟合实测含水量比 $a=0$ 要精确得多。

5. 雨强 I 和雷达反射率因子 Z

实测谱雨强: $I = \frac{\pi}{6} \sum n D^3 V(D) \Delta D$

雷达反射因子: $Z = \sum n D^6 \Delta D$

则相应的拟合值为:

$$I_0 = 2.196 \times 10^3 \cdot A_0 / (1.95 + \lambda_0)^5$$

$$I_2 = 6.588 \times 10^4 \cdot A_2 / (1.95 + \lambda_2)^7$$

$$Z_0 = 7.20 \times 10^8 \cdot A_0 / \lambda_0^3$$

$$Z_2 = 4.032 \times 10^{10} \cdot A_2 / \lambda_2^3$$

式中 $V(D)$ 是直径为 D 的雨滴末速, 取 Uplinger^[7]结果: $V(D) = B \cdot D \cdot e^{-\gamma D}$ 其中, $B = 4854.1$, $\gamma = 1.95$ 。式中各量的单位如下: I [$\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$]、 Z [$\text{mm}^6 \text{m}^{-3}$]、 D [cm]、 λ [cm^{-1}]、 A_0 [$\text{m}^{-3} \cdot \text{cm}^{-1}$]、 A_2 [$\text{m}^{-3} \cdot \text{cm}^{-3}$]、 ρ 为水的密度, 单位 [$\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$]、 V [$\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$]

与实测值的相对百分误差记为: $f_0(I)$ 、 $f_2(I)$ 、 $f_0(Z)$ 、 $f_2(Z)$, 其频率分布列于表5。

表5 I 和 Z 的百分误差频率分布

f	a	误差范围 (%) 频率	0~30	30~60	60~100	>100	合计
			出现次数	55	34	26	36
$f(I)$	0	%	36.42	22.52	17.22	23.84	100.00
		出现次数	26	91	32	2	151
	2	%	17.22	60.26	21.19	1.32	99.99
		出现次数	17	16	14	104	151
$f(z)$	0	%	11.26	10.60	9.27	68.87	100.00
		出现次数	56	63	28	4	151
	2	%	37.09	41.72	18.54	2.65	100.00

从表5得出: 雨强百分误差在30%以下时, $a=0$ 优于 $a=2$, 但在0~60%范围, 则 $a=2$ 优于 $a=0$ 。而且, 用 $a=2$ 仅有1.32%的样本(2次)百分误差超过100%, 而用 $a=0$ 时却有36个样本(23.84%)百分误差超过100%。因此, 综合起来看, $a=2$ 优于 $a=0$ 。雷达反射因

子百分误差在0~100%范围内均是 $\alpha=2$ 明显优于 $\alpha=0$, 而且 $\alpha=2$ 的拟合值和实测值有倍数差异(百分误差大于100%)的仅4个样本(2.65%), 而 $\alpha=0$ 的却高达104个。

6. 雨强和雷达反射率因子的相关关系

以 $Z=LI^M$ 形式拟合实测值和回归值, 结果见图2。

从图2可见, 用 $\alpha=2$ 拟合的 $Z-I$ 关系, 其相关系数 R 、系数 L 和幂指数 M 均比 $\alpha=0$ 时更接近实测值。和实测 $Z-I$ 关系算得的 Z 值百分误差随雨强增大而减小, 没有倍数差异, 而 $\alpha=0$ 则相反。

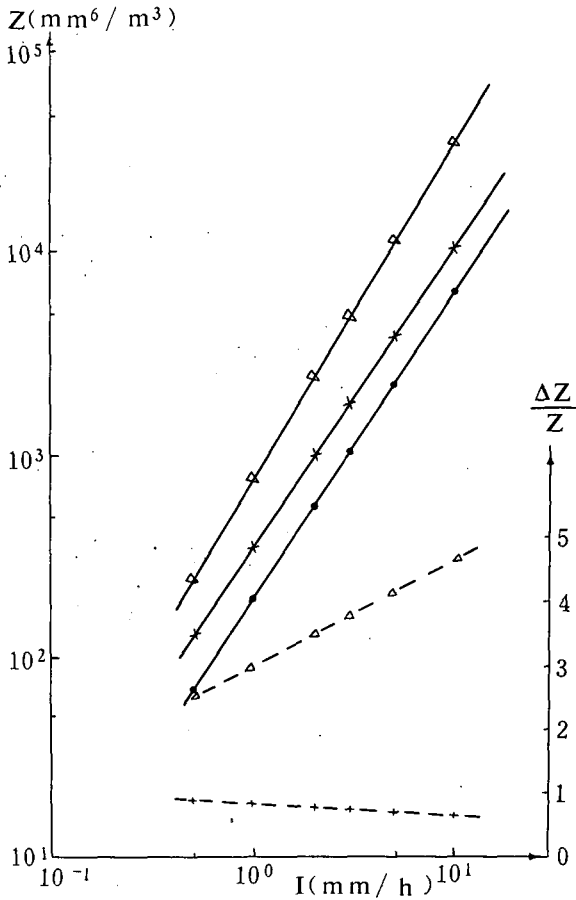


图2 $Z-I$ 相关关系和实测值相对百分误差(资料系内蒙1982年7月8日垂直探测资料89组)

·—· 实测拟合值, $\Delta-\Delta$ $\alpha=0$ 拟合 Z 值, $\Delta-\Delta-\Delta$ $\frac{\Delta Z}{Z}(\%)$,
 + — + $\alpha=2$ 拟合 Z 值, + — — — + $\frac{\Delta Z}{Z}(\%)$

四、结 论

1. 根据实测雨滴谱特征尺度 D_1 、 D_2 、 D_3 的比值 $k_1 = D_1/D_2$ 、 $k_2 = D_2/D_3$ 可求出 $\Gamma(D)$ 分布参数 α ，进而可方便地求出分布参数 A 和 λ 。

2. Marshal—Palmer 公式拟合实测雨滴谱有较大偏离，特别是雨水含量 Q 。雨强 I 、雷达反射率因子 Z 的相对百分误差超过 100% 的频率在 23.84~68.87% 间。

3. 用三参数 A 、 λ 和 α (本文 $\alpha=2$) 来拟合实测值比双参数 A 、 λ ($\alpha=0$) 无论是数浓度、特征尺度、雨水含量、雨强和雷达反射率因子都更接近实测资料。

参 考 文 献

- [1] WMO, International Meteorological Vocabulary, 551. 578. 1., 1966.
- [2] Литвинов, И. В., Структура Атмосферных Осадков, стр. 42—45, Гидрометеиздат. Ленинград, 1974.
- [3] Marshal, J. S. and W. M. Palmer, *J. Meteor.* 5, 2, 1948.
- [4] Deirmendjian, D., Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions. 14, Elsevier, 1969.
- [5] Pruppacher, H. R. and K. A. Beard, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 96, 408, 1970.
- [6] 高桥磐郎等著, 潘德惠等译, 统计数值分析, 295, 辽宁人民出版社, 1981 年。
- [7] Uplinger, W. C. 20th Conference on Radar Meteorology, 389—391, American Meteor. Soc. 1981.

RAINDROP PARTICLE SIZE DISTRIBUTION IN THE LOWER TROPOSPHERE

Yan Caifan Chen Wankui

(Academy of Meteorological Science, SMA)

Abstract

In the paper, Γ -distribution [$n(D) = AD^{\alpha-\lambda D}$] parameters (A, α, λ) are obtained by the ratio $k_1 = D_1/D_2$, $k_2 = D_2/D_3$ and linear regression method, where D_1, D_2 , and D_3 are diameters for average, root mean square and root mean cube, respectively.

The statistical data analysis of raindrop size distribution measured with OAP—2D—P show that the parameter α_1 is usually close to α_2 obtained from k_1 and k_2 , respectively, so, value α between α_1 and α_2 can be used to approach to it. We have chosen $\alpha=2$, $n(D) = AD^2e^{-\lambda D}$ are used to fit into observational raindrop spectra, which is more accuracy than Marshal—Palmer formular ($\alpha=0$). Thus, the regression coefficients (R), characteristic diameters (D_1, D_2, D_3), number concentrations (N), rain rates (I) and radar echo reflectivity (Z) are all more approximate to observational raindrop spectra than those from the two parameters.