

一种提高数值模式时间差分计算精度的新格式——回溯时间积分格式*

封国林

(扬州大学理学院物理系,扬州 225002)

曹鸿兴 谷湘潜

(中国气象科学研究院,北京 100081)

丑纪范

(中国气象局培训中心,北京 100081)

提 要

为了使用以制作数值预报的微分方程中包含更多的信息量,以期提高预报准确度,该文提出了一种基于记忆动力学的时间积分格式。以天气预报为实例,计算表明,平流方程的回溯时间积分格式所得的预报准确度大大高于传统的蛙跃差分格式。此方法在海洋、水文、环境、航空等应用平流方程计算的多种科学中亦是有效的。

关键词:差分格式 记忆性 数值预报 平流方程

引 言

在微分方程数值计算中,差分格式对于其精确度与有效性都是极其重要的。在天气预报中,有多种时间积分格式被研究和采用过^[1,2]。半隐格式可以说是效果较好的一种,用于动力-热力方程的某些项有较高的精确度和相对大的时间步长。半拉格朗日格式因为可以取较大的步长,对计算机的设备要求较低,而计算机精确度却有所增加,近年来日益引起人们的兴趣。

王斌等^[3]在一维偏微分方程中运用特征方向法,对完全平方守恒显式差分格式进行了改进,得到了理论上无条件稳定的格式。应用理想化的 Rossby-Haurwitz 波对正压浅水方程波进行了计算,结果表明,该格式可以节省计算时间。但是对时间积分格式的改进仅停留在传统的无记忆框架中。

许多差分格式都是以一些物理量(如能量、角动量等)守恒为基础设计的。Egger^[4]曾研究了一种在相空间中容积守恒的数值积分格式;对可逆流问题严格地要求容积守恒进行了论证。他认为这种流的总体预报的初始分布所占有的相空间容积是不随时间改变

* 本文受国家自然科学基金(40175024,40175027)和国家重点基础研究发展规划(G1998040901-1)项目资助。
2000-02-02 收到,2000-09-25 收到修改稿。

的。他设计了一个相应的对容积守恒的检验方法并对平流方程的格点表示和一维非粘性浅水流进行了检验。

曹鸿兴等^[5,6]提出并发展了大气记忆动力学,他们的基本观点是考虑大气有记忆能力,可以由多个时次的初始场而不仅是一个时次的初始场来求得大气运动的数值解。本文中的回溯时间积分格式也是基于类似的想法,即利用多时间层次资料,建立一种新的时间积分格式。这种格式与传统的格式很不一样,可以包含三个以上不同的时间层次,可以从过去的多时次场中得到更多的信息。这种格式在数值计算中还能自动起过滤作用,可以平滑预报场中的虚假值。

事实上,也曾有人在时间积分格式中有过类似的想法。Rivest 等^[7]提出对 $n+1$, n 和 $n-1$ 时次的观测值选定适当的系数,以调节不同时次观测值的作用。

本文从介绍回溯时间积分格式的基本理论入手,对大气记忆动力学也作了简介,给出了回溯格式和它的稳定性表达式,最后以回溯时间积分格式对平流方程进行了计算,并与蛙跃格式进行了比较。

由于平流方程在如海洋、水文、环境、航空等多种学科中使用,本文提出的方法在计算数学中也是一个贡献。

1 基本理论

对微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \quad (1)$$

可以用不同的差分格式进行运算,例如中央差分格式

$$(u(t + \Delta t) - u(t - \Delta t))/2\Delta t = F(t) \quad (2)$$

上式(2)亦可改写为:

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t) &= u(t - \Delta t) + 2\Delta t F(t) \\ &= \alpha_0 u(t) + \alpha_{-1} u(t - \Delta t) + \theta_0 \Delta t F(t) + \theta_{-1} \Delta t F(t - \Delta t) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{-1} = 1$, $\theta_0 = 2$, $\theta_{-1} = 0$ 。式(2)是在数值计算基础上得出的,遗憾的是,实际上由于 $\alpha_0 = 0$ 和 $\theta_{-1} = 0$,这样的计算略去了包含于 $u(t)$ 和 $F(t - \Delta t)$ 等项中的信息。而这些信息正巧是对预报 $u(t + \Delta t)$ 很有用的。也就是说,在作 $u(t + \Delta t)$ 预报时希望用到 t 和 $t - \Delta t$ 间的变量 u 和源函数 F 的全部信息。

对式(3)作一个推广,得出

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t) &= \alpha_0 u(t) + \alpha_{-1} u(t - \Delta t) + \dots + \alpha_{-p} u(t - p\Delta t) + \theta_0 \Delta t F(t) + \dots \\ &+ \theta_{-p} \Delta t F(t - p\Delta t) = \sum_{i=0}^{-p} \alpha_i u(t + i\Delta t) + \sum_{i=0}^{-p} \theta_i \Delta t F(t + i\Delta t) \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)就称之为数值模式中具有 p 阶($p \geq 2$)的时间积分回溯格式。对于这个格式,关键问题是如何决定系数 α_i 和 θ_i 。如果把 u 值看作系统中的一个状态变量,把函数 F 看作是系统的外界变量,式(4)正是系统辨识中的一般性方程。所以式(4)中的系数可以由系统辨识中的种种方法来确定^[8]。如随机近似,松弛算法,经典的最小二乘法乃至遗传算

法等。以下计算中用的是最小二乘法。

实际上,数值天气预报已使用了多时次的观测资料,只不过是包含了两个步骤,即时间积分和时间过滤。我们引用 ECMWF(欧洲中期天气预报中心)模式作如下论证。在 ECMWF 谱模式^[9]中,时间积分格式为

$$x(t + \Delta t) = \bar{x}(t - \Delta t) - 2\Delta t(A(t) + S(t - \Delta t)) \quad (5)$$

式中 A, S 分别代表绝热和非绝热项。那里有 3 个时间层次 $p = p + 2 = 3, \bar{x}(t)$ 是时刻 t 的滤波值,即

$$\bar{x}(t) = x(t) + \alpha(\bar{x}(t - \Delta t) - 2x(t) + x(t + \Delta t)) \quad (6)$$

同样地有

$$\bar{x}(t - \Delta t) = x(t - \Delta t) + \alpha(\bar{x}(t - 2\Delta t) - 2x(t - \Delta t) + x(t)) \quad (7)$$

从式(5)~(7)可以看出,式(5)中 $x(t + \Delta t)$ 包含了 $x(t - 2\Delta t)$ 的信息,因为权重 α 值比较小, $\alpha = 0.06$,由 $x(t - 2\Delta t)$ 得到的信息也是比较少的。它启发了我们,要设计一个新的时间积分格式,使能包含更多的时间层次,例如: $t + \Delta t, t, t - \Delta t, t - 2\Delta t, \dots, t - p\Delta t$, 即 $p \geq 2$,且不在积分过程中作时间过滤。这意味着新的格式至少具有两个功能:时间积分和时间过滤。由于积分过程中没有进行时间过滤,大气波就不会减弱。这样的大气方程的解可以更精确。

2 记忆动力学

要决定式(4)中系数 a_i 和 b_i 的值,可以有两种途径。一种是直接的,即前面已经提到过的,以最小二乘法或随机近似等方法由观测资料求得;另一种是间接的,由记忆动力学^[5]演绎而得。下面将对此进行介绍。

一般地说,大气动力-热力方程可写作

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = F_i(x, \lambda, t) \quad i = 1, 2, \dots, j \quad (8)$$

其中 j 是整数, x_i 是第 i 个物理变量, λ 是物理参数。为简单起见,以下只考虑一个物理量 x ,在 $F_i(x, \lambda, t)$ 中略掉 x 和 λ 。这样式(8)只表示 x 的一个局地变化和一个源函数 F 的关系。显然, x 是在空间 r 和时间 t 的纯量函数。引入权重 $\beta(r, t)$ 作为记忆函数,式(8)从 t_0 至 t 的加权积分为

$$\int_{t_0}^t \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau = \int_{t_0}^t \beta(\tau) F(\tau) d\tau \quad (9)$$

其中因为空间点 r 是固定的, $\beta(r, t)$ 中的 r 可以省写。对式(9)左侧运用分部积分得

$$\int_{t_0}^t \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau = \beta(t)x(t) - \beta(t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^t x(\tau)\beta'(\tau) d\tau \quad (10)$$

式中 $\beta'(\tau) = \partial \beta(\tau) / \partial \tau$ 。应用中值定理计算式(10)右侧的第三项,即得

$$- \int_{t_0}^t x(\tau)\beta'(\tau) d\tau = -x^m(t_0)(\beta(t) - \beta(t_0)) \quad (11)$$

其中,中值 $x^m(t_0) \equiv x(t_m), t_0 < t_m < t$ 。把式(10)和(11)代入式(9)并进行代数运算,得

到

$$x(t) = \frac{\beta(t_0)}{\beta(t)} x(t_0) + \frac{\beta(t) - \beta(t_0)}{\beta(t)} x^m(t_0) + \frac{1}{\beta(t)} \int_{t_0}^t \beta(\tau) F(\tau) d\tau \quad (12)$$

式(12)的前两项,是在固定的 r 点,只与在初始时刻 t_0 和中间时刻 t_m 的 x 有关,所以称之为自记忆项。式中第三项称为有效项,即在时间段 $[t_0, t]$ 内其它空间点对固定点 r 的总有效贡献。对于多时次即 $t_i, i = -p, -p+1, \dots, t_0, t$ 类似于式(10)推导,可以记作:

$$\int_{t_{-p}}^{t_{-p+1}} \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau + \int_{t_{-p+1}}^{t_{-p+2}} \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau + \dots + \int_{t_0}^t \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau = \int_{t_{-p}}^t \beta(\tau) F(\tau) d\tau \quad (13)$$

消去相同的项 $\beta(t_i) x(t_i), i = -p+1, -p+2, \dots, 0$, 得出

$$\beta(t) x(t) - \beta(t_{-p}) x(t_{-p}) - \sum_{i=-p}^0 (\beta(t_{i+1}) - \beta(t_i)) x^m(t_i) - \int_{t_{-p}}^t \beta(\tau) F(\tau) d\tau = 0 \quad (14)$$

这是一个差分-积分方程,称为回溯阶 p 的自忆性方程,这也就是将要讨论的基本方程。

令 $p=0$,则时间仅有 t 和 t_0 ,式(14)变成式(12),称为0阶自忆性方程。若 $p=1$,则有时间 t, t_0 和 t_{-1} ,式(14)成为

$$\beta(t) x(t) - \beta(t_{-1}) x(t_{-1}) - (\beta(t_0) - \beta(t_{-1})) x^m(t_{-1}) - (\beta(t) - \beta(t_0)) x^m(t_0) - \int_{t_{-1}}^t \beta(\tau) F(\tau) d\tau = 0 \quad (15)$$

称式(15)为1阶自忆性方程。例如一维平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -C \frac{\partial u}{\partial x} \equiv F \quad (17)$$

其中 x 表示空间坐标, C 为常定平流速度。对空间 r 点,与式(14)相类似,自忆性方程为

$$\beta(j, t) u(j, t) = \beta(j, t_{-p}) u(j, t_{-p}) + \sum_{i=-p}^0 [\beta(j, t_{i+1}) - \beta(j, t_i)] u^m(j, t_i) - \int_{t_{-p}}^t \beta(j, \tau) \frac{\partial u(j, \tau)}{\partial x} d\tau \quad (18)$$

若以式(14)作预报,要用到 t 时刻以前的 $u(t_i)$ 的 p 个值和 $F(t_i)$ 的 p 个场。所以,在式(14)中, $\beta(t_i)$ 的作用是记忆 $p+1$ 的 u 值和 $p+1$ 的 F 场。这是我们称这为记忆函数的原因,也是提出记忆动力学的数学基础^[5,6]。

3 平流方程的回溯格式

采用在差分格式中使用的符号,即令

$$\begin{aligned} \beta_j^{n+1} &\equiv \beta(j, t), & \beta_j^{n-1} &\equiv \beta(j, t_{-1}), \dots \\ u_j^{n+1} &\equiv u(j, t), & u_{j+1}^n &\equiv u(j+1, t), \dots \\ \mu &= -C \Delta t / \Delta x \end{aligned}$$

对 $n-p$ 至 $n+1$ 的积分以求和来代替,空间则采用中央差分,回溯阶为 p ,式(17)的回溯格式为

$$u_j^{n+1} = \alpha_{-p} u_j^{n-p} + \sum_{i=-p}^0 \alpha_i (u_j^{n+i})^m + \sum_{i=-p}^1 (\theta_i u_{j+1}^{n+i} - \bar{\theta}_i u_{j-1}^{n+i}) \quad (19)$$

其中:

$$\alpha_{-p} = \beta_j^{n-p} / \beta_j^{n+1}, \alpha_i = (\beta_j^{n+i+1} - \beta_j^{n+i}) / \beta_j^{n+1}$$

$$\theta_i = \mu \beta_{j+1}^{n+i} / 2 \beta_j^{n+1}, \bar{\theta}_i = \mu \beta_{j-1}^{n+i} / 2 \beta_j^{n+1}$$

令 $p=1$, $\beta_j^{n+1} = \beta_j^n = \beta_j^{n-1} = 1$, $\beta_{j+1}^{n+1} = \beta_{j-1}^{n+1} = 0$, $\beta_{j+1}^n = \beta_{j-1}^n = 2$, $\beta_{j+1}^{n-1} = \beta_{j-1}^{n-1} = 0$
则式(19)为

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \mu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (20)$$

这就是蛙跃差分格式^[10]。如果取定不同的 α_i , θ_i , $\bar{\theta}_i$ 和 $(u_j^{n+i})^m$ 就可以得到种种不同的差分格式,这可能是构造回溯格式的一个丰富多彩的结果。若令

$$\beta_j^{n+1} = \beta_j^n = \beta_{j+1}^n = \beta_{j-1}^n = 1, \beta_j^{n-1} = \beta_{j+1}^{n-1} = \beta_{j-1}^{n-1} = \varepsilon$$

$$(u_j^{n-1})^m = (u_j^n + u_j^{n-1})/2, \quad (u_j^n)^m = (u_j^{n+1} + u_j^n)/2$$

式(19)成为

$$u_j^{n+1} = \alpha_0 u_j^n + \alpha_1 u_j^{n-1} + \theta_0 (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \theta_1 (u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}) \quad (21)$$

其中 $\alpha_0 = (1 - \varepsilon)/2$, $\alpha_1 = (1 + \varepsilon)/2$, $\mu = -C\Delta t/\Delta x$, $\theta_0 = \mu/2$, $\theta_1 = \theta_0 \varepsilon$

令 $\varepsilon=1$,则

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + \frac{\mu}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n + u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}) \quad (22)$$

这就是 Grank-Nicolson 差分格式。

令 $\varepsilon=1/2$,则

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{4} u_j^n + \frac{3}{4} u_j^{n-1} + \frac{\mu}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\mu}{4} (u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}) \quad (23)$$

如果以蛙跃差分格式与之比较,明显地看到在对 u_j^{n+1} 的预报中包含了 u_j^n , u_{j+1}^{n-1} 和 u_{j-1}^{n-1} 的信息。

令 $\varepsilon=0$,则

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} u_j^n + \frac{1}{2} u_j^{n-1} + \frac{\mu}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

令 $\varepsilon=-1$,则

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\mu}{2} [(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - (u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1})] \quad (24)$$

从式(21)至式(24)可以看出,给定不同的记忆函数,差分格式即有相应的变化。

4 回溯格式的稳定性

众所周知,蛙跃格式(20)的稳定条件为 $|\omega\Delta t| \leq 1$,如果 $|\omega\Delta t| > 1$,格式必定是不稳定的。在对式(21)格式的稳定性进行研究时,先观察式(21)与式(20)有何差异。显而易见

见,两者的差异在于式(21)比式(20)更多地包含有在 n 和 $n-1$ 时刻观测得到的信息。

$$\text{令} \quad u_l^h = u^h e^{ik\Delta x l} \quad (25)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, $l = j-1, j, j+1$, $h = n-1, n, n+1$ 。

把式(25)代入式(21),得到

$$u^{n+1} = a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \mu \varepsilon \sin(k\Delta x) u^{n-1} + \mu \dot{\varepsilon} \sin(k\Delta x) u^n \quad (26)$$

其中 $\sin(k\Delta x) = (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x})/2i$, 同类项合并后,得到

$$u^{n+1} - \left(\frac{1-\varepsilon}{2} + i\omega\Delta t\right) u^n - \left(\frac{1+\varepsilon}{2} + i\varepsilon\omega\Delta t\right) u^{n-1} = 0$$

式中 $\omega = -\frac{C}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$ 。对增幅因子 G 定义为 $u^{n+1} = Gu^n$, $u^n = Gu^{n-1} = G^2 u^{n-2}$, 对于式(26), G 的方程为

$$G^2 + BG + D = 0 \quad (27)$$

其中 $B = -\left((1-\varepsilon)/2 + i\omega\Delta t\right)$, $D = -\left((1+\varepsilon)/2 + i\varepsilon\omega\Delta t\right)$, 式(27)的两个解为

$$G_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\varepsilon}{2} + i\omega\Delta t + A \right) \quad (28a)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\varepsilon}{2} + i\omega\Delta t - A \right) \quad (28b)$$

其中 $A = \{[(3+\varepsilon)^2 - 4\omega^2\Delta t^2]/4 + i\omega\Delta t(1+3\varepsilon)\}^{1/2}$, 对于真解 $G=1$ 。从式(28)有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} G_1 = 1$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} G_2 = |-(1+\varepsilon)/2| < 1, \text{若 } -3 < \varepsilon < 1$$

对于真解必定有 $|G_1| = 1$, 所以式(28a)与物理波相联, 而式(28b)则与计算波相联。令 $u_1^n = G_1^n u_1^0$, $u_2^n = G_2^n u_2^0$, 则

$$u^n = a G_1^n u_1^0 + b G_2^n u_2^0 \quad (29)$$

以下计算还需要两个初始值, 一个物理的 u_1^0 和一个计算的 u_2^0 , a 与 b 为常量。从式(29)可得出

$$u^0 = a u_1^0 + b u_2^0$$

$$u^1 = a G_1 u_1^0 + b G_2 u_2^0$$

式(29)可改写为

$$u^n = \frac{1}{G_1 - G_2} [G_1^n (u^1 - G_2 u^0) - G_2^n (u^1 - G_1 u^0)] \quad (30)$$

以下讨论一些特例:

(1) 若 $\omega\Delta t = 0$, 且 $-3 < \varepsilon < 1$, 则 $G_1 = 1$, $|G_2| = |-(1+\varepsilon)/2| < 1$, 这种情况下的差格式是稳定的。

(2) 若 $\omega\Delta t \neq 0$, 当 $\text{Im}(A) = 0$, 则 $(1+3\varepsilon) = 0$, $\varepsilon = -1/3$ 。令

$$A = \{[(3+\varepsilon)^2 - 4\omega^2\Delta t^2]/4 + i\omega\Delta t(1+3\varepsilon)\}^{1/2} = [16/9 - \omega^2\Delta t^2]^{1/2}$$

(a) 若 $A > 0$, 即 $|\omega\Delta t| < 4/3$, 则

$$G_1 = (1 + 2\sqrt{H})/3 + \omega\Delta t/2$$

$$G_2 = (1 - 2\sqrt{H})/3 + \omega\Delta t/2$$

其中 $H = (1 - 9 \omega^2 \Delta t^2 / 16)$ 。显然 $|G_1| \leq 1$, $|G_2| \leq 1$, 其数值计算是稳定的。相角为

$$\theta_1 = \arctan[3 \omega \Delta t / (2 + 4 \sqrt{H})]$$

$$\theta_2 = \arctan[3 \omega \Delta t / (2 - 4 \sqrt{H})]$$

则有

$$u^n = u_1^0 e^{in\theta_1} + u_2^0 e^{in\theta_2} \quad (31)$$

(b) 当 $A = 0$, 即 $|\omega \Delta t| = 4/3$

$$G_1 = G_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} i \omega \Delta t \quad \text{若 } \omega \Delta t = \frac{4}{3}$$

$$G_1 = G_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} i \omega \Delta t \quad \text{若 } \omega \Delta t = -\frac{4}{3}$$

可得出 $|G_1| < 1$, $|G_2| < 1$

$$\theta_1 = \arctan(3 \omega \Delta t / 2), \quad \theta_2 = \arctan(-3 \omega \Delta t / 2)$$

所以得出的表达式为

$$u^n = u_1^0 e^{in\theta_1} + u_2^0 e^{in(\pm\pi - \theta_1)} \quad (32)$$

(c) 若 $A < 0$, 即 $|\omega \Delta t| > 4/3$,

$$G_1 = \frac{1}{3} + i \left(\frac{\omega \Delta t}{2} + \frac{2}{3} \sqrt{|H|} \right)$$

$$G_2 = \frac{1}{3} + i \left(\frac{\omega \Delta t}{2} - \frac{2}{3} \sqrt{|H|} \right)$$

如果 $\omega \Delta t > 4/3$ 则 $|G_1| > 1$; 如果 $\omega \Delta t < -4/3$ 则 $|G_2| > 1$ 。容易看出, 格式(21)总是不稳定的。如上所述,

$$\theta_1 = \arctan[3 \left(\frac{\omega \Delta t}{2} + \frac{2}{3} \sqrt{|H|} \right)]$$

$$\theta_2 = \arctan[3 \left(\frac{\omega \Delta t}{2} - \frac{2}{3} \sqrt{|H|} \right)] \quad (33)$$

$$u^n = u_1^0 e^{in\theta_1} + u_2^0 e^{in\theta_2}$$

格式(21)与蛙跃格式有相同的特点, 即周期为 $4\Delta t$ 的波是不稳定的。

(3) 令 $E = (3 + \varepsilon)^2 / 4 - \omega^2 \Delta t^2$, $F = \omega \Delta t (1 + 3\varepsilon)$, 方程

$$\sqrt{E + iF} = X + iY \quad (34)$$

成立。分别对式(34)两侧平方, 把实数部分与虚数部分对应, 可得

$$X^2 - Y^2 = E \quad (35a)$$

$$2XY = F \quad (35b)$$

联立方程(35)的解为

$$X = \pm \sqrt{(E + \sqrt{E^2 + F^2})/2}$$

$$Y = \pm \sqrt{(-E + \sqrt{E^2 + F^2})/2}$$

(a) $E \geq 0$

通过推导, 得出

$$G_1 = (1 - \varepsilon)/4 + X/2 + i(\omega \Delta t + Y)/2$$

$$G_2 = (1 - \varepsilon)/4 - X/2 + i(\omega\Delta t - Y)/2$$

假定 $|\varepsilon| < 1$, 按照 $E \geq 0$, 即 $|\omega\Delta t| \leq (3 + \varepsilon)/2$ 取

$$X = \pm \sqrt{(E + \sqrt{E^2 + F^2})/2}, Y = F/2 X, \text{得到}$$

若 $\varepsilon = -1$, $|\omega\Delta t| \leq 1$

若 $\varepsilon = -0.6$, $|\omega\Delta t| < 1.2$

若 $\varepsilon = 0$, $|\omega\Delta t| < 1.5$

若 $\varepsilon = 1$, $|\omega\Delta t| < 2$

(36)

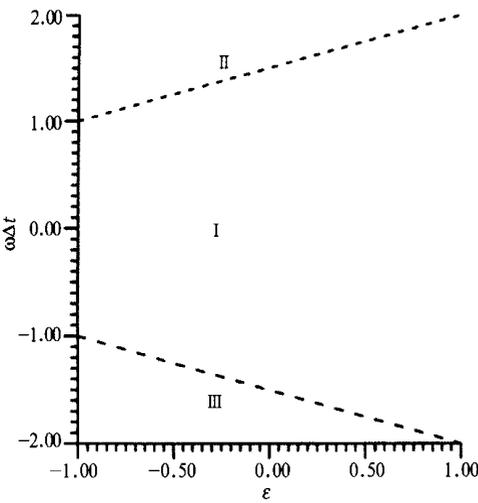


图1 稳定区域 I 与不稳定区域 II、III
(纵坐标 $\omega\Delta t$, 横坐标为 ε , ω 是频率,
 ε 是式 (21) 中的一个记忆参数)

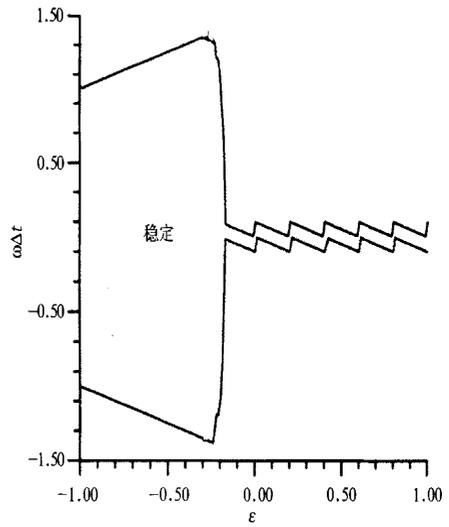


图2 $\varepsilon \geq 0, E = (3 + \varepsilon)^2/4 - (\omega\Delta t)^2$
时的稳定域(说明同图1)

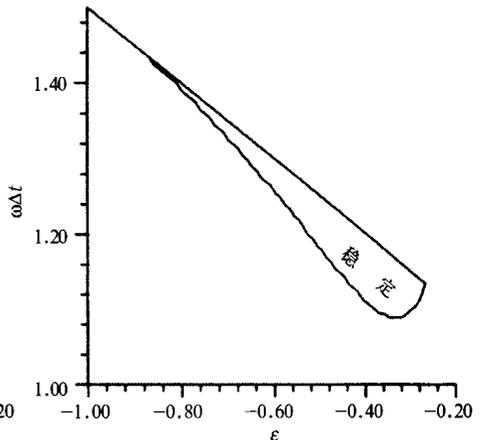
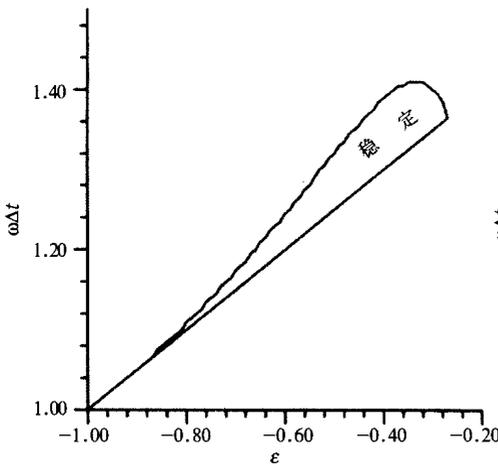


图3 区域 II 和 III 中的稳定区域

式(36)的图示在图 1 中给出,图中区域 I 满足式(36)。在这个区内满足 $|G_1| \leq 1$ 和 $|G_2| \leq 1$ 的稳定区域在图 2 中表示。由图可以看出以下特征:

若 $\varepsilon \in [-1, -0.269754]$ 且 $|\omega \Delta t| \leq (3 + \varepsilon)/2$, 则 $|G_1| \leq 1, |G_2| \leq 1$, 格式(21)是稳定的;若 $\varepsilon \in [-0.269754, -0.1800]$ 且 $|\omega \Delta t| \leq 1.415$, 则 $|G_1| \leq 1, |G_2| \leq 1$, 格式(21)是稳定的;若 $\varepsilon \in [-0.1800, 1]$ 且 $|\omega \Delta t| \leq 0.10$, 则 $|G_1| \leq 1, |G_2| \leq 1$, 格式(21)是稳定的,这个稳定区域的边界好象一个双波运动。

(b) $E < 0$

即 $|\omega \Delta t| > (3 + \varepsilon)/2$, 取

$$Y = [(-E + \sqrt{E^2 + F^2})/2]^{1/2}$$

$$X = F/2Y$$

这就是图 1 中的区域 II 和区域 III。

这两个区域中满足 $|G_1| \leq 1$ 和 $|G_2| \leq 1$ 的面积都很小,如图 3 所示。从图 3 可以看到它们的稳定区域图形好象两个快速下坠中的流星。

为了对稳定区有一个总体概念,图 4 给出了各稳定区的综合。

5 平流方程的计算

根据式(4),可以把式(17)的蛙跃格式写作:

$$u(x, t + \Delta t) = \alpha_0 u(x, t - \Delta t) + \alpha_1 u(x, t) + \theta_0 u(x + \Delta x, t - \Delta t) - \bar{\theta}_0 u(x - \Delta x, t - \Delta t) + \theta_1 u(x + \Delta x, t) - \bar{\theta}_1 u(x - \Delta x, t) \quad (37)$$

取 $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \theta_0 = \bar{\theta}_0 = 0, \theta_1 = \bar{\theta}_1 = \mu$ 。且采用在差分格式中常用的符号,式(37)就成为式(20)。因为假定了 $\alpha_1 = \theta_0 = \bar{\theta}_0 = 0$,所以在 t 时刻的单个观测资料和 $t - \Delta t$ 时刻的场资料都没有得到利用。

作为一个实例,假定有 3 个时间水平,在 t 和 $t - \Delta t$ 时刻的资料全都用上,以式(21)回溯格式进行计算,式中的系数 $\alpha_0, \alpha_1, \theta_0$ 和 θ_1 不是由给定 $\beta(r, t)$ 一个特定值来决定,而是由一个理想场资料以最小二乘法来确定,由理想流

$$u(x, t) = a \sin(\omega x - \sigma t) \quad (38)$$

计算得出,式中

$$\omega = 2\pi/L_x, L_x = 3600 \text{ km}, \sigma = 2\pi/T, T = 5 \text{ d} = 5 \times 24 \text{ h}, x_i = i \Delta x, \Delta x = 300 \text{ km}, t_\tau = T\Delta t, \Delta t = 1 \text{ h}, \sigma = \omega c, a = 10 \text{ m/s}, c = 8.3 \text{ m/s}$$

显然,式(38)是正弦和余弦项的组合。如果 x 为已知, u 随时间 t 而变,首先计算 120 h

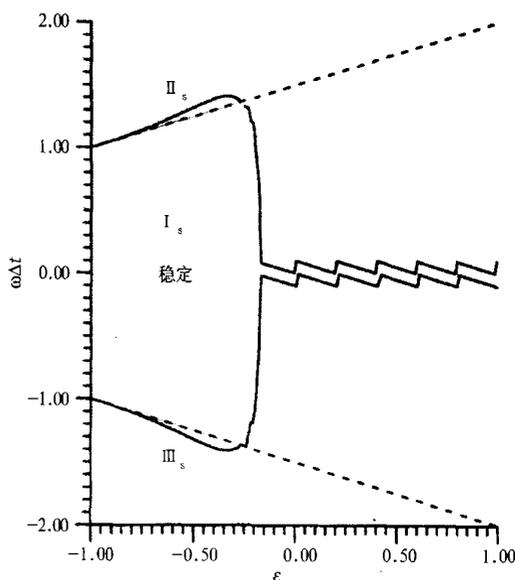


图 4 I、II 和 III 三个区中稳定域的合并 (II_s 和 III_s 是图 3 中相应部分的缩小)

时间序列,称为实时序列。这序列是由式(38)假定 $x = 1800, 2000, 2400$ km 产生的。随后是 48 h 序列,是设定了 $p = 1$,以式(20)和(21)预报得出的。在积分中,对于蛙跃格式时间步长为 10 min,回溯格式时间步长为 1 h。所用的依赖样本 120 个,独立样本 48 个。若取定 $x = 1800$ km,通过计算,得出回溯时间积分方程为

$$u_j^{n+1} = 0.6839 u_j^n + 0.3161 u_j^{n-1} - 0.0480 (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - 0.0177 (u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}) \quad (39)$$

表 1 蛙跃格式(LF)与回溯格式(RT)在时间积分中的精确度的比较

		空间尺度(km)			平均
		2400	2000	1800	
相关系数(R)	LF	0.951	0.945	0.898	0.931
	RT	0.994	0.987	0.992	0.991
均方根误差(RMSE)	LF	21.04	5.029	9.754	11.94
	RT	2.707	2.681	2.435	2.608

在表 1 中可以明显地看到回溯积分比蛙跃格式好得多。虽然用蛙跃格式(LF)或回溯格式(RT)预报得出的时间序列与用式(38)生成的时间序列的相关系数都是显著的($R_{0.01} = 0.37$),但是 RT 的相关系数都比 LF 的大,特别是 RT 的均方根误差(RMSE)比 LF 的小得多。平均相差 5 倍($11.94/2.608 = 4.6$),在 $x = 2000$ km 时,至少也有 2 倍。这足以证明 RT 格式计算是比较精确的。此外,在计算中 RT 格式所取步长为 1 h,它是 LF 格式计算的 6 倍,所以效率也大大高于 LF 格式。

6 结 论

在各种不同的预测预报领域,如海洋、水文、气象、地震乃至经济等,对提高预报准确度和效率给予了极大的关注,本文提出的回溯时间积分格式比传统采用的积分格式包含更多的信息,使观测所得的点和场资料能得到充分利用,而且在计算中所用记忆系数本身能起到时间平滑的作用,避免了在积分过程中进行时间平滑。可见,回溯格式对提高数值预报准确度和计算速度有可靠的效果,是一个有前途的新方法。当然,任何新的方法都需要经历逐步提高与完善的过程,回溯格式也不例外。从数学上充分证明回溯格式的稳定性是很困难的,本文针对记忆函数的特定的取值来加以讨论,是否对所有情况都有普适性,有待于继续研究。

参 考 文 献

- 1 Robert A. A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmos-Ocean*. 1981, 19 (1): 35 ~ 46.
- 2 Ó'Brien J J. Time integration schemes, *Advanced Physical Oceanographic Numerical Modeling*. J. J. Ó'Brien ed. NATO ASI Series, Reidel, 1986. 155 ~ 164.
- 3 Wang Bin, et al. A time-saving explicit scheme for numerical integration. *Chinese Science Bulletin*, 1993, 38(3): 230 ~ 234.
- 4 Egger J. Volume conservation in phase space: a fresh look at numerical integration schemes. *Mon. Wea. Rev.* 1996,

- 124(9): 1955 ~ 1964 .
- 5 Cao Hongxing . Self memorization equation in atmospheric motion . *Science in China , series B* , 1993 , **36**(7) : 845 ~ 855 .
- 6 Cao Hongxing and Zhu Zhengxing . Self memorization and predictability of atmospheric motion . WMO/ TD No. 652 , 1995 .
- 7 Rivest C , Staniforth A and Robert R . Spurious resonant response of semi Lagrangian discretization to orographic forcing . *Mon . Wea . Rev .* , 1994 , **122** : 366 ~ 376 .
- 8 蔡季水 . 系统辨识 . 北京 :北京理工大学出版社 , 1989 .
- 9 ECMWF . ECMWF forecast model . Reading : ECMWF Research Department , 1987 .
- 10 Haltiner G J . Numerical Weather Prediction . New York : John Wiley & Son Inc . 1971 .

A NEWScheme FOR IMPROVING THE ACCURACY OF NUMERICAL PREDICTION — RETROSPECTIVE TIME INTEGRATION SCHEME

Feng Guolin

(Mathematics and Physics College , Yangzhou University , Yangzhou 225009)

Cao Hongxing Gu Xianqian

(Chinese Academy of Meteorological Sciences , Beijing 100081)

Chou Jifan

(CMA Training Center , Beijing 100081)

Abstract

To put more information into a difference scheme of a differential equation for making an accurate prediction , a new kind of time integration scheme , known as the retrospective scheme , is proposed on the basis of the memorial dynamics . Stability criteria of the scheme of an advection equation in certain conditions are derived mathematically . The computations for the advection equation have been conducted with its retrospective scheme . It is shown that the accuracy of the scheme is much higher than that of the leapfrog difference scheme . The retrospective time integration scheme can be applied to oceanography , hydrology , environmental sciences , aviation and so on .

Key words : Time integration Memory Numerical weather prediction