

非线性平衡方程初值化方法及其在中期 数值天气预报试验中的应用

郑庆林

(气象科学研究院天气动力研究所)

提 要

本文给出了一种求解非线性平衡方程的新的有效的方法及有关的数值试验结果。和以往的求解方法相比,本方法的优点是:收敛速度快,不需要冗长的迭代计算,也不需要初始高度场的某些记录作修改,并能节省大量的计算时间。

文中利用北半球土层原始方程谱模式,使用了1982年的客观分析资料^[1],进行中期数值天气预报试验。试验结果表明,用非线性平衡方程初值化方法制作中期数值预报比其他的如线性平衡方程初值化方程的更佳。后者因去掉了非线性项的作用,天气系统的强度预报结果偏弱且偏平滑。

一、引 言

非线性平衡方程初值化方法不仅为数值天气预报中的平衡模式所使用,也是原始方程模式所常用的初值处理方法之一。

在求解非线性平衡方程时,大多数人采用了Miyakoda, K.^[1](1956)的求解方法,这种方法是把非线性平衡方程写成了如下的形式:

$$\xi = -f + \sqrt{f^2 + \frac{2}{a^2}(u^2 + v^2) + A^2 + B^2 + \frac{4}{a}\Omega u \sin\theta + 2\nabla^2\phi} \quad (1)$$

其中,

$$\xi = \nabla^2\psi$$

$$u = \frac{1}{a} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$v = -\frac{1}{a\sin\theta} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$$

$$A^2 = \left(\frac{2}{a} \frac{\partial u}{\partial\theta} - \xi \right)^2$$

$$B^2 = \frac{4}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2$$

众所周知, (1)式的求解是很复杂的, 为保证椭圆型条件, 必须对初始高度场记录作修改, 且收敛速度慢, 需要冗长的迭代计算, 计算量大, 这就影响了这种初值化方法的应用, 特别是对于业务数值预报模式, 很难采用这种初值处理方法。

本文提出一种新的求解非线性平衡方程的方法, 能有效地克服以往的缺点, 已成功地应用到北半球土层原始方程谱模式^[2]中, 进行大量的中期数值天气预报试验和研究。

二、非线性平衡方程初值化方法

1. 方法(a)

通过数值试验发现, 对非线性平衡方程的求解并不需要(1)式的形式。本文设计出新的有效的求解方法, 并用到模式的初值处理中, 即非线性平衡方程初值化方法, 简称方法(a)。

(在以下的对方法(a)及其他初值化方法的讨论是在半球范围内进行, 但仍可推广到全球及有限区域)。

首先将非线性平衡方程写成如下的迭代求解的形式:

$$a^2 \nabla^2 \psi^{(k+1)} = \left\{ a^2 \nabla^2 \phi + 2 \Omega a \sin \theta \cdot u_\psi^{(k)} - \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\cos \theta \cdot (u_\psi^{(k)} + v_\psi^{(k)}) \right] - \frac{2}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} u_\psi^{(k)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} v_\psi^{(k)} - \frac{\partial}{\partial \theta} u_\psi^{(k)} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} v_\psi^{(k)} \right) \right\} / f_1 \quad (3)$$

$$u_\psi^{(k+1)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial \theta} \quad (4a)$$

$$v_\psi^{(k+1)} = -\frac{1}{a \sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial \lambda} \quad (4b)$$

$$f_1 = \begin{cases} f(0^\circ \leq \theta \leq \theta_c) \\ f_c(\theta_c < \theta \leq 90^\circ) \end{cases} \quad (5)$$

其中, u_ψ , v_ψ 为模式所需要的初始时刻的无辐散风分量。

选 θ_c 为 80° , u_ψ , v_ψ 由对应的初始地转风给出。

可用谱方法求解(3)–(4)式, 非线性项的计算方法用本文作者在多层谱模式^[2-4]所设计的方法, 具体求解过程在此不详述了。

这里着重介绍, 本文在初值处理中所用的谱方法和格点法相结合的求解(3)–(4)式的方法。

先由初始的球面经纬度网格点上 ϕ 场的值, 计算出地转风场, 给出 $u_\psi^{(0)}$, $v_\psi^{(0)}$, 代进

(3)式的右端项中，用格点差分法，计算出(3)式的右端项在球面上各经纬网格点上的值。接着按球面函数展开，根据(3)式， $\psi^{(1)}$ 的展开系数可立即得到。再将 $\psi^{(1)}$ 的展开式代进(4)式的右端项中，在完成对 θ 和对 λ 的导数的计算后(精确可微)，迭加回到格点上，于是可得到 $\psi^{(1)}$ ， $v\psi^{(1)}$ 在各经纬度格点上的值。重复进行上述过程，可以得到， $u\psi^{(2)}$ ， $v\psi^{(2)}$ ， $\dots u\psi^{(k)}$ ， $v\psi^{(k)}$ 。

大量的个例的数值试验表明，只需很小的 k 值，即可达到足够满意的精确度要求，且不需要对初始高度场记录作修改，优点是突出的。如果以 $\epsilon_u^{(k)}$ ， $\epsilon_v^{(k)}$ 分别表示第 k 次与第 $k-1$ 次之间的 $u\psi$ ， $v\psi$ 的均方根误差，计算是在北半球范围的1224个经纬度网格点上进行的。

那么有：

$$\epsilon_A^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i \sum_j [(A\psi^{(k)})_{i,j} - (A\psi^{(k-1)})_{i,j}]^2} \quad (6)$$

其中，标号 A 可以分别表示 u ， v 。

表 1 (1982年1月15日) $\epsilon_u^{(k)}$ ， $\epsilon_v^{(k)}$ 随 k 的变化 (单位：米/秒)

k	200 (hPa)		500 (hPa)		850 (hPa)	
	$\epsilon_u^{(k)}$	$\epsilon_v^{(k)}$	$\epsilon_u^{(k)}$	$\epsilon_v^{(k)}$	$\epsilon_u^{(k)}$	$\epsilon_v^{(k)}$
1	5.819	2.731	2.767	2.014	1.510	1.540
2	1.992	0.967	0.779	0.478	0.414	0.190
3	0.811	0.506	0.254	0.147	0.188	0.465
4	0.457	0.267	0.092	0.032	0.075	0.014
5	0.264	0.173	0.029	0.020	0.025	0.005
6	0.159	0.104	0.011	0.008	0.007	0.002
7	0.097	0.070	0.005	0.003	0.002	0.001
8	0.060	0.050	0.002	0.001	0.0004	0.0002
9	0.040	0.039	0.001	0.001	0.0001	0.0001

表 1 表示在冬季情形下，在三个等压面上 $\epsilon_u^{(k)}$ ， $\epsilon_v^{(k)}$ 随 k 的变化。可以看到，当迭代次数 $k = 6$ 时，500百帕层的整个北半球的纬向风的前后两次的均方根误差已小到0.011米/秒，而当 $k = 4$ 时，即可小于0.1米/秒，已达到足够的精确度要求，收敛速度快。

从表 2 可以看到，在夏季的情形下，对于500百帕纬向风场，只需 $k = 4$ ，此时 $\epsilon_u^{(4)} = 0.104$ 米/秒， $\epsilon_v^{(4)} = 0.015$ 米/秒，已达到足够的精确度要求。

由于收敛速度快，计算量小，在IBM-360计算机上，当 $k = 9$ 时，只需5秒。

2. 其它有关的初值化方法

以下将给出线性平衡方程初值化方法以及有关的其他几种初值化方法，以便与方法(a)所作的中期数值预报试验进行对比。

方法(b)，线性平衡方程初值化方法。

表 2 (1982年7月6日) $\langle k \rangle \langle k \rangle$ $\varepsilon_u \varepsilon_v$ 随 k 的变化 (单位: 米/秒)

k	200 (hPa)		500 (hPa)		850 (hPa)	
	$\langle k \rangle \varepsilon_u$	$\langle k \rangle \varepsilon_v$	$\langle k \rangle \varepsilon_u$	$\langle k \rangle \varepsilon_v$	$\langle k \rangle \varepsilon_u$	$\langle k \rangle \varepsilon_v$
1	2.582	2.334	1.650	1.752	1.312	1.456
2	0.868	0.501	0.516	0.336	0.285	0.203
3	0.376	0.182	0.183	0.059	0.126	0.050
4	0.136	0.060	0.104	0.015	0.051	0.008
5	0.037	0.028	0.059	0.004	0.018	0.004
6	0.014	0.012	0.028	0.002	0.008	0.001
7	0.005	0.006	0.011	0.001	0.003	0.0003
8	0.002	0.003	0.004	0.0002	0.001	0.0002
9	0.001	0.001	0.001	0.0001	0.0001	0.00003

$$a^2 \nabla^2 \psi = (a^2 \nabla^2 \phi + 2 \Omega a \sin \theta \cdot u_\psi) / f_1 \quad (7)$$

$$u_\psi = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (8a)$$

$$v_\psi = -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (8b)$$

求解方法类同于在上述的方法(a)中所用的解法, 这里不详述了。

方法(c), 由地转风给出模式所需的风场的初值。

方法(d), ψ 的初值用下式计算。

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{a \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot u|_{t_0}) - \frac{\partial}{\partial \lambda} v|_{t_0} \right] \quad (9)$$

由(9)式得到 ψ , 再由(8)式, 可得到模式所需的 u_ψ , v_ψ 的初值。

其中, $u|_{t_0}$, $v|_{t_0}$ 分别为初始时刻的实测风分量。

方法(e), 非地转流函数初值化方法

这是作者于1981年设计的初值化方法^[4], 把非线性平衡方程近似改写成如下的形式:

$$a^2 \nabla^2 \psi_b = \left[a^2 \nabla^2 \phi + (\operatorname{tg} \theta)_1 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] / f_1$$

$$- \frac{1}{f_1^3 a^2} \left\{ 2 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_g \cdot a^2 \nabla^2 \phi - (\hat{u}_g^2 + \hat{v}_g^2) - 2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_g \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{v}_g \right)^2 \right] \right\}$$

其中,

$$\hat{u}_g = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$\hat{v}_g = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$$

$$f_1 = \begin{cases} f & (0 \leq \theta \leq \theta_0) \\ f_0 & (\theta_0 < \theta \leq 90^\circ) \end{cases} \quad (\text{tg } \theta)_1 = \begin{cases} \text{tg } \theta & (0 \leq \theta \leq \theta_0) \\ \text{tg } \theta_0 & (\theta_0 < \theta \leq 90^\circ) \end{cases}$$

θ_0 通过数值试验选定。

不难看到，(3)式的右端项均为已知的，求解一次泊松方程即可，不需要迭代计算，计算量小，且从大量的数值试验结果，这种方法比线性平衡方程初值方法有改进。但缺点也是明显的，这就是由于右端项中的无辐散风场被用地转风所代替而引起的对平衡的很小程度上的影响，致使其预报效果比用非线性平衡方程初值化方法要稍差些。

上述的非线性平衡方程初值方法(a)以及其他的初值化方法(b)，方法(d)、方法(e)给出了模式所需的初始时刻的 u_ψ, v_ψ 。而模式所需的辐散风分量的初值 u_x, v_x ，通过求解相同形式的 ω 方程，再由连续方程得到。

上述的讨论是在等压面上进行，再将 u, v 初值转换到 σ 面上。

三、非线性平衡方程初值化方法在中期数值天气预报试验中的应用

利用欧洲中期数值预报中心的逐日客观分析资料，在北半球土层原始方程谱模式(二)^[5]中，用非线性平衡方程初值化方法以及线性平衡方程初值化等其他方法制作多个例的中期数值预报试验。比较其结果可以看到，非线性平衡方程初值化方法(a)最好，方法(d)最差；线性平衡方程初值化方法(b)比方法(a)差，但比方法(c)和方法(d)好；方法(e)虽比方法(a)差，但比方法(b)好，且节省计算量。

表 3 (1982年7月6日)500hPa等压面高度场的 r, e_F (米), e_{PES} (米)随预报时效的分布

表 4 (1982年1月15日)500hPa等压面高度场的 r, e_F, e_{PES} 随预报时效的分布

		方法(a)	方法(b)	方法(d)
24小时	r	0.86	0.83	0.77
	e_F	18	19	22
	e_{PES_0}	34	34	34
48小时	r	0.79	0.76	0.69
	e_F	34	35	39
	e_{PES_0}	54	54	54
72小时	r	0.78	0.74	0.68
	e_F	39	41	44
	e_{PES_0}	61	61	61
96小时	r	0.72	0.67	0.64
	e_F	45	47	49
	e_{PES_0}	64	64	64
120小时	r	0.72	0.67	0.63
	e_F	47	49	52
	e_{PES_0}	67	67	67

		方法(a)	方法(b)
24小时	r	0.90	0.90
	e_F	36	36.4
预报	e_{PES}	83	83
48小时	r	0.81	0.74
	e_F	60	70
预报	e_{PES}	103	103
72小时	r	0.74	0.69
	e_F	88	95
预报	e_{PES}	131	131
96小时	r	0.65	0.64
	e_F	115	116
预报	e_{PES}	152	152
120小时	r	0.64	0.62
	e_F	130	129
预报	e_{PES}	165	165

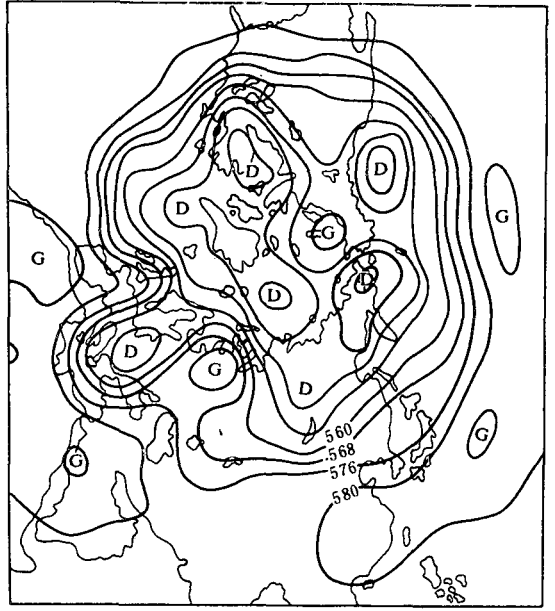
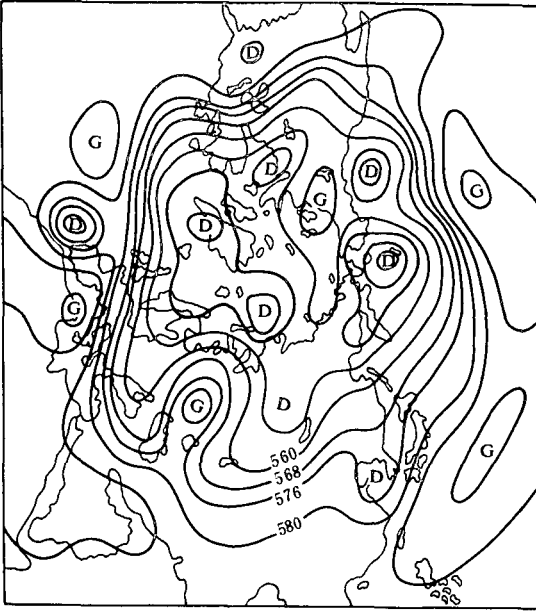


图 1 1982年 7 月 6 日 12 时 (世界时, 下同),
500hPa 等压面高度客观分析 (初始场)
(单位: 10 位势米) (下同)

图 2 1982年 7 月 9 日 500hPa 等压面高度客
观分析场 (72 小时实况用于验证图 3)

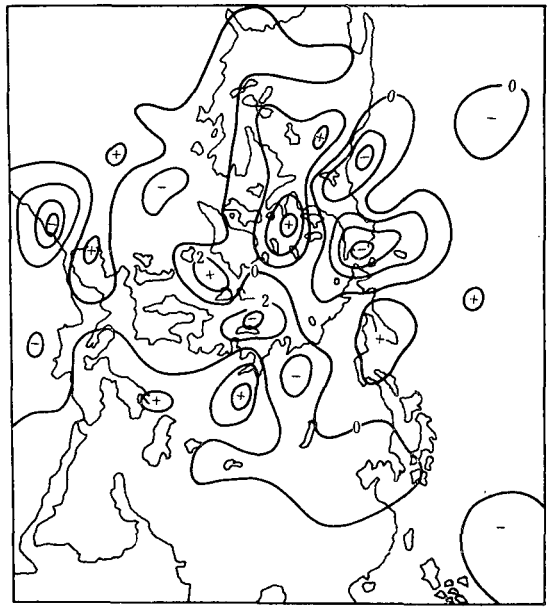
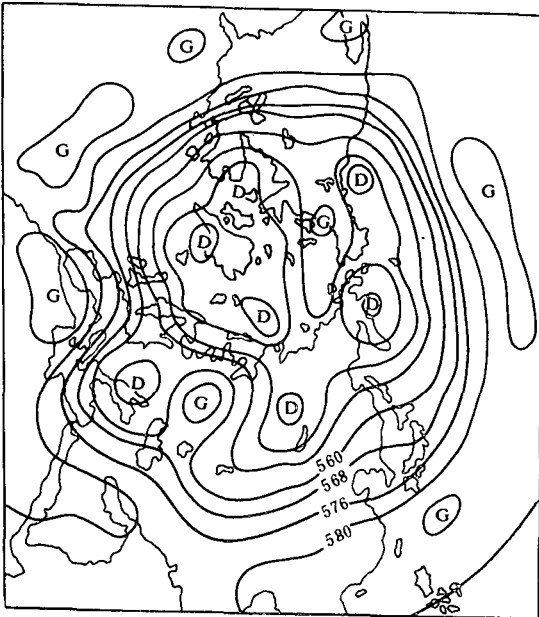


图 3 用七层谱模式, 并采用初值化方法 (a) 所
制作的 500hPa 高度场 (72 小时预报场)

图 4 方法 (a) 所制作的 72 小时 500hPa 高度预报
与方法 (b) 所得到的 72 小时预报场之差值分布图。

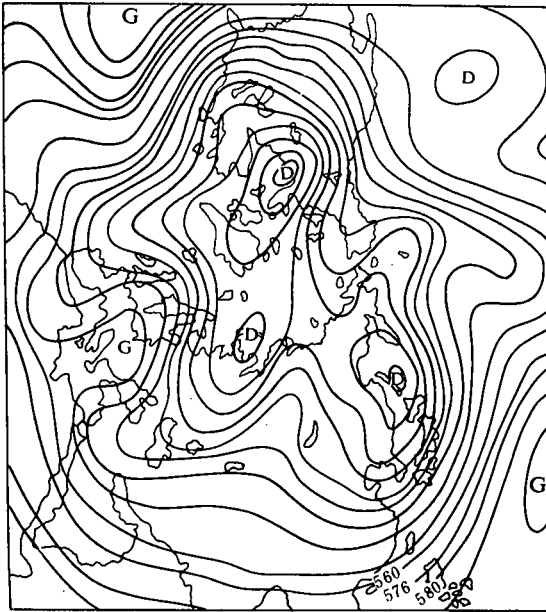


图 5 用方法(a)得到的1982年1月15日的初始流场分布
(可与图6对比, 单位: 9.8×10^5 米²/秒)

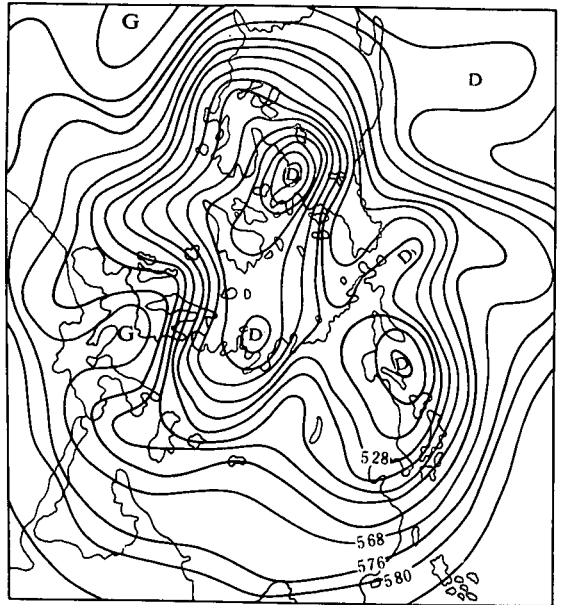


图 6 1982年1月15日12时, 500hPa高度客观分析场(初始场)

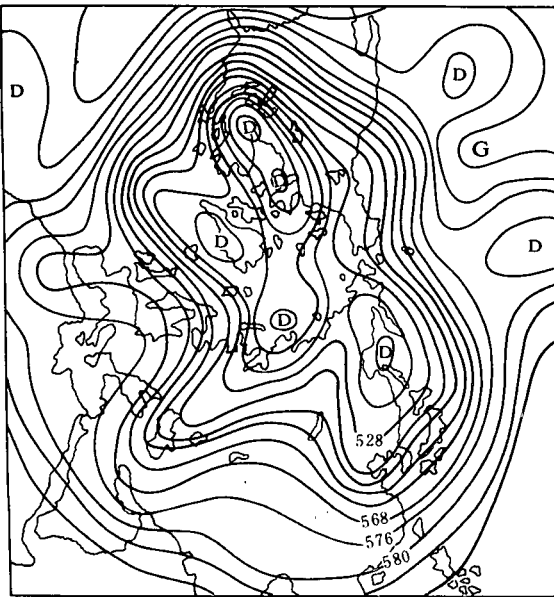


图 7 1982年1月17日12时, 500hPa高度分析场(48小时实况, 用于验证图8)

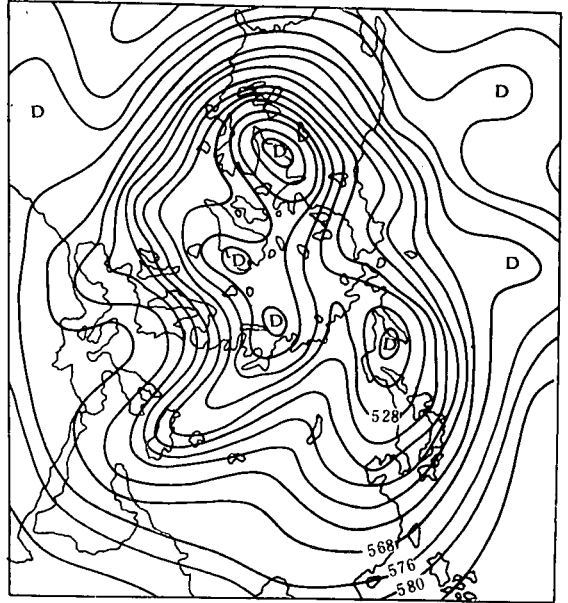


图 8 利用方法(a)所制作的500hPa高度场(48小时预报)

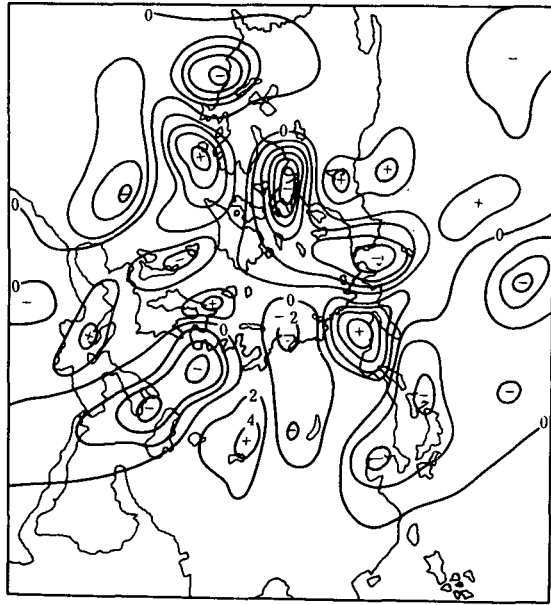


图 9 (例 1982 年 1 月 15 日的 48 小时 500hPa 高度预报的)
方法(a)与方法(b)的差值分布

以 r 表示模式预报的变高场和实况变高场之间的相关系数, 以 e_F 和 e_{PES} 分别表示模式预报的和持续性预报的高度场与所对应的实况高度场之间的均方根误差, 验证的范围为北半球, 在 1000 个经纬网格点上计算的。

表 3, 表 4 给出了不同季节的七层原始方程谱模式利用方法(a)和方法(b)等两种不同的初值化方法制作中期数值天气预报试验的验证结果。可以看到, 不论是在冬季, 还是在夏季、非线性平衡方程初值化方法(a)的结果都要比线性平衡方程初值化方法(b)好。在夏季, 在 5 天中期数值预报内, 方法(a)的 r 值比方法(b)平均高出 4%。而从第 3 天至第 5 天预报, 方法(a)的 r 值则比方法(d)平均高出 9%。在冬季, 从第 1 天至第 5 天数值预报结果、方法(a)的 r 值比方法(b)平均高 3%。从上述对比结果, 在初值处理中, 非线性平衡方程中的非线性项的作用是不可忽视的。

图 1 至图 4 给出了利用方法(a)所作个例(1982 年 7 月 6 日)的初始场、预报图和所对应的实况图以及用方法(a)和方法(b)所得到的预报结果差异图。

图 1 和图 2 反映出了从 1982 年 7 月 6 日至 7 月 9 日的三天之内北半球 500hPa 等压面形势发生了如下的重要变化: (1) 原来在从黑海到大西洋的平直气流带已转换为两大槽一强脊的形势。(2) 原来从黑海西部至斯堪的纳维亚半岛的西北——东南向的大深槽, 已在黑海地区形成了切断形势。(3) 原在乌拉尔地区的阻塞高压位置少动, 但高压中心向北移动。(4) 贝加尔湖以西的低压槽东移至贝加尔湖, 有所加深。我国东部的低槽减弱东移。(5) 原从加拿大西部到美国西部的低压槽以较快速度东移加深, 移至美国东部至格陵兰岛, 美国为平直气流所控制, 而原在美国东部的高压脊已东移至大西洋中部地

区。

图 3 是 72 小时的预报图, 所预报的形势变化与实况基本一致。

图 4 是方法 (a) 的高度预报与方法 (b) 的高度预报之差值分布图。从图中可以看到, 由于方法 (b) 在初值处理中没有考虑非线性项的作用, 低压中心及高压中心强度比方法 (a) 预报得偏弱, 整个形势也比方法 (a) 预报的偏平滑, 故与实况的偏差比方法 (a) 要大些。特别是在形势变化大的地区, 方法 (a) 与方法 (b) 相比, 优点就更突出了。

图 5 至图 9 给出了利用方法 (a) 所作个例 (1982 年 1 月 15 日) 的初始流场图, 预报图, 实况图及用方法 (a) 和方法 (b) 所得到的预报结果差异图。

从图 6、图 7 可以看到, 原西欧的高压脊明显东移加强, 使得整个欧洲及西亚地区为一大高压脊区所控制。位于里海北部的大低压区也有了较大的变化, 演变成了东北-西南向的狭长低压带。原在贝加尔湖西边的高压脊东移并加强, 使得位于亚洲东部的低压区的范围变小。图 8 中的预报与实况的变化基本一致。

从图 9 中同样可以看到, 用方法 (a) 所制作的预报结果 (包括天气系统的位置, 强度等) 比方法 (b) 要好、特别是在形势变化大的地区。方法 (b) 比方法 (a) 预报的平滑、与实况的偏差要大些。

四、结 论

本文所设计的求解非线性平衡方程的方法 (a)、收敛速度快, 不需要冗长的迭代计算, 不需要对初始场高度记录作修改, 与 Miyakoda, K., 的方法相比, 有明显的优点。有利于在数值预报研究模式和业务数值预报模式中应用。

本文中所提及的各种初值化方法, 通过大量的试验比较, 方法 (a) 的中期数值预报效果最好, 方法 (e) 次之, 而方法 (b) 虽比方法 (e) 差, 但比方法 (c) 及方法 (d) 好, 方法 (d) 最差。

本文所得的结果说明了, 在初值处理中、非线性平衡方程中的非线性项的作用是不可忽视的, 否则, 会使得预报场偏于平滑、天气系统强度预报得偏弱, 与实况的偏差也要大些。

参 考 文 献

- [1] Miyakoda, K., On a method of solving the balance equation *J. Meteor. Sci.*, Japan, 34, 364—367, 1956.
- [2] 郑庆林, 北半球三层准地转波谱模式, *气象学报*, 37, 36—43, 1979.
- [3] 郑庆林, 北半球七层初始方程谱模式, 第二次全国数值天气预报会议论文集, 科学出版社, 13—24, 1980.
- [4] 郑庆林, 北半球四层初始方程谱模式, *中国科学*, 2, 1981.
- [5] 郑庆林, 北半球七层初始方程谱模式(二)及其试验结果, *气象科学技术集刊*, 气象出版社, 第 8 期, 1—11, 1985.

EXPERIMENTS ON THE MEDIUM-RANGE NUMERICAL WEATHER PREDICTION

Zheng Qinglin

(Institute of Synoptic and Dynamic Meteorology, AMS)

Abstract

The initialization scheme of nonlinear balance equation is a more useful method not only in the balance model but also in the primitive equation model. But as we know that the routine method for solving the nonlinear balance equation contains the extraction of the square root, this operation consists of many operations of arithmetic in computing. Especially this calculation is to be performed at every gridpoint in every step of iteration, and to be required more iteration times. So the amounts of computations are considerably large.

In this paper, a new and very efficient method for solving the nonlinear balance equation is proposed, and the difficulties mentioned above have been already removed.

The experiments on medium-range numerical weather prediction are performed by using the seven-level spectral model with different initialization schemes including the nonlinear balance equation, linear balance equation, "non-geostrophic stream function", and simply geostrophic wind. From the results, we can see that the nonlinear balance equation initialization scheme is the best one. Because of the absence of nonlinear terms in the linear balance equation initialization scheme, the forecasting results of weather system are rather smooth and weak.