

凝结(华)过程的数值模拟方法研究

王 谦 胡志晋

(气象科学研究院人工影响天气研究所)

在中小尺度数值模拟研究中,经常需要较精确地计算水的凝结和冰的凝华过程。由于从单滴扩散增长理论所推出的方程要求时间步长取得很短(通常小于1秒),因此,除较细致的云微物理模拟外,它很少被直接采用。一般使用“暖云假设”,即假设云内过饱和度在凝结后为零,然后直接计算或采用迭代法处理。但当模式中考虑冰相时,云中过饱和度的绝对值较大,这种方法便不宜使用。本文从云滴扩散增长的参数化处理方法出发,提出了一种既不需要迭代,同时也允许使用较长的时间步长的计算方法。本文还将该方法与其通用方法作了比较。

一、方法的推导

在处理云微物理过程时,为节省内存和机时,通常采用参数化方案^[1],即将滴谱参数化。此时,谱的形式设为:

$$n = n_0 e^{-\lambda D} D^m dD \tag{1}$$

其中 n 为粒子的浓度, D 为粒子的直径。对云滴来说可取 $m=2$, 而对冰晶 $m=1$ 。

将(1)式代入云滴的单滴扩散增长方程^[2],可以得到群滴凝结率为:

$$S_{wc} = K_l(q_v - q_s) \tag{2}$$

其中

$$K_l = 0.5974 n_l^{2/3} q_l^{1/3} / \left[\frac{L_w q_s}{K_r T} \left(\frac{0.622 L_w}{RT} - 1 \right) + \frac{RT}{K_d p} \right] \tag{3}$$

n_l 为云滴比浓度, q_l 为云滴比质量, q_v 为比湿, q_s 为水面饱和比湿, L_w 为水的凝结潜热系数, K_r 为空气热扩散系数, K_d 为空气中水汽的扩散系数,其它均为气象常用符号。本文中取 $n_l = 10^8$ 个/kg。

同样,也可得到冰晶的群体凝华率为:

$$S_{wi} = K_i(q_v - q_{si}) \tag{4}$$

其中 q_{si} 为冰面饱和比湿。 K_i 也可从单晶扩散增长方程得到:

$$K_i = 2 a_1 n_i \left(\frac{q_i}{6 n_i} \right)^2 \left(\frac{1}{q_s - q_{si}} \right) \tag{5}$$

其中 a_1 和 a_2 均为温度的函数,数值见文献^[3]; q_i 为冰晶比质量, n_i 为冰晶比浓度,本文取:

$$n_i = 0.105505 \exp[-0.485(T - T_0)] / \rho \quad (6)$$

将(2)和(4)式代入模式方程组即可计算。但由于 K_l 为 1 秒^{-1} 的量级, 因此其计算时间步长一般要求小于1秒。

如果我们写出:

$$S_{pc} + S_{ni} = (K_l + K_i)(q_v - q_s) + K_i(q_s - q_{ni}) \quad (7)$$

考虑到 $K_i \ll K_l$, 因此我们可将 $K_i(q_s - q_{ni})$ 一项与其它微物理过程代入模式中运算, 得出 $T^*, q_s^*, q_v^*, q_i^*, q_r^*$ 等, 然后再来处理 $(K_l + K_i)(q_v - q_s)$, 则此时可得:

$$\frac{Dq_v}{Dt} = - (K_l + K_i)(q_v - q_s) \quad (8)$$

$$\frac{Dq_s}{Dt} = S_1 \frac{DT}{Dt} \quad (9)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho c_p} (K_l L_{lv} + K_i L_{iv})(q_v - q_s) \quad (10)$$

其中 L_{iv} 为冰的凝华潜热系数; S_1 如下式:

$$S_1 = \frac{3.8}{p} \cdot \frac{4.928 \times 10^3}{(T - 36)^2} \cdot 10^{7.5(1 - \frac{237}{T-36})} \quad (11)$$

解(8)–(10)式得:

$$\frac{D(q_v - q_s)}{Dt} = - \beta(q_v - q_s) \quad (12)$$

有:

$$\beta = [K_l + K_i + \frac{S_1}{\rho c_p} (K_l L_{lv} + K_i L_{iv})] \quad (13)$$

若忽略 β 在计算时间步长内的变化, 由全隐式差分可得:

$$\begin{aligned} q_v - q_s &= (q_v^* - q_s^*) / (1 + \beta \Delta t) \\ &= \Delta q \end{aligned} \quad (14)$$

和

$$\begin{cases} q_l = q_l^* + K_l \Delta q \Delta t \\ q_i = q_i^* + K_i \Delta q \Delta t \\ q_r = q_r^* - (K_l + K_i) \Delta q \Delta t \end{cases} \quad (15)$$

(14)与(15)式就是我们所提出的方案。注意到(12)式具有负指数解的性质, 因此这种方法可以容许较长的时间步长。另外, 它也不需要作迭代。

二、试验结果

1. 误差试验

以式(2)和(4)为基准(以下称方法1), 与我们所提的方案(以下称方法2)一起作了大量试验, 考察了这种方法在一些典型环境下的误差。为方便计, 采用了 $\theta_a^{[4]}$ 为热力学守

恒量,给出热力学方程:

$$\frac{d\theta_{sl}}{dt} = \left(\frac{dT}{dt}\right)_{Env} \quad (16)$$

其中 $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{Env}$ 为人为给定的环境变温率。

初始条件为 $q_{i0} = 10^{-3} \text{kg/kg}$, $q_{w0} = 10^{-4} \text{kg/kg}$, $p = 880 \text{hPa}$, 在试验中气压不变。方法1的时间步长取0.25秒,方法2的步长分别取5—30秒,即 $\Delta t_2/\Delta t_1$ 分别为20—120倍。两法分别积分150秒,以方法1为标准考察误差 $E_T = T_2 - T_1$, $E_{q1} = q_{i2} - q_{i1}$, $E_{q2} = q_{w2} - q_{w1}$ 等。

试验1. 初始过饱和度 S_0 的影响

$T_0 = 265 \text{K}$, $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{Env} = 0$ 初始过饱和度 S_0 分别取为0.0001, 0.001, 0.01和0.1。温度误差 E_T 见图1。可以看出 E_T 随 S_0 和 $M = \Delta t_2/\Delta t_1$ 加大而增大,但实际值是非常小的($E_T \leq 2.4 \times 10^{-4} \text{K}$)。 E_{q1} 和 E_{q2} 分别小于 10^{-3}g/kg 和 10^{-6}g/kg 。因此可以认为是足够精确的。从另一个角度来说, S_0 对误差基本无影响。

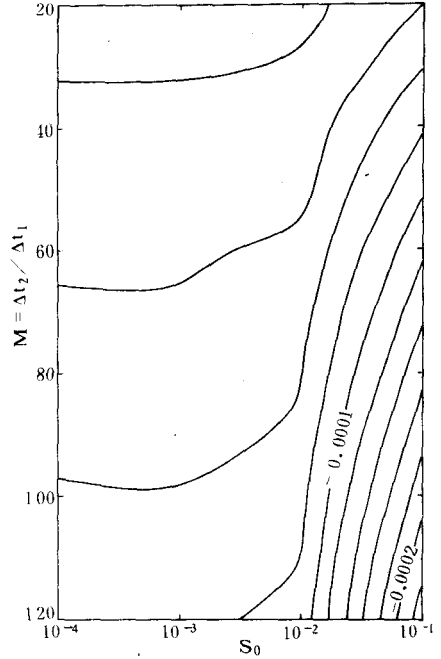


图1 试验1的 E_T 随 S_0 和 M 变化的情况 (单位:K)间隔为 0.2×10^{-4}

试验2. 初始温度 T_0 的影响

$S_0 = 0.001$, $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{Env} = 0$ 。取 T_0 范围为271—253 K(间隔2K)。 E_T 的情况见图2。可以看出误差最大处对应于 $T_0 = 257 \text{K}$ 。在该初始温度下, E_T 同时也随 M 增大而增大,当 $M = 120$ 时, $E_T \approx 1.2 \times 10^{-2} \text{K}$ 。在 $T_0 \geq 259 \text{K}$ 时, $E_T \leq 2 \times 10^{-3} \text{K}$ 。 $T_0 \leq 255 \text{K}$ 时,误差只与 M 有关。这样的情况是由冰水饱和差及冰晶浓度与温度的关系所导致的。在试验中, E_{q1} 和 $E_{q2} \leq 3.5 \times 10^{-2} \text{g/kg}$ 。

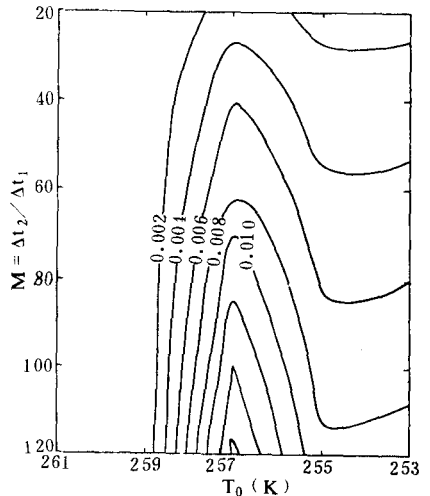


图2 试验2中 E_T 随 M 和初始温度 T_0 变化的情况(单位:K)间隔为 0.2×10^{-2}

试验3. 环境变温率 $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{Env}$ 的影响

$T_0 = 265 \text{K}$, $S_0 = 0.001$ 。取 $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{Env}$ 为0—0.2 K/s(间隔0.02)。 E_T 随 $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{Env}$ 和 M 增大而增大(图3),当 E_T 达到 $5.4 \times 10^{-2} \text{K}$ 时又急剧下降,随后变为一排等值中心,此后又有所加大并对应 $M = 100$ 处形成误差增大的中心。图中右半部分的图像很难一下解释清楚,估计与误差方程中的非线性项作用有关。

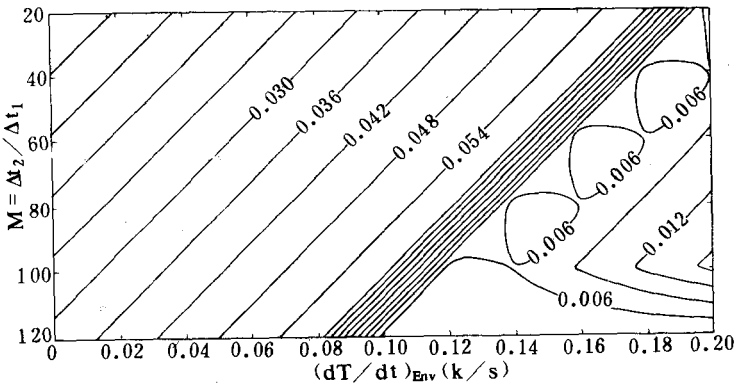


图3 试验3中 E_T 随环境变温率 $(\frac{dT}{dt})_{Env}$ 和 M 变化的情况

(单位: K) 间隔为 0.6×10^{-2}

2. 对比试验

对比试验的目的是检验我们提出的方法在接近实际大气环境下的模拟精度,同时对各种常用算法作一比较。在试验中加以比较的除前面所用的方法1和方法2外,还有:方法3^[5]:

$$S_{rc} \Delta t = (q_v^* - q_s^*) / [1 + \frac{0.622 L_{iv}^2 q_s^*}{c_p R T^2}] \tag{17}$$

方法4:用(17)式作迭代

方法5:

$$S_{rc} = \frac{dq_s}{dt} \tag{18}$$

并使用迭代。

以上三种方法都使用(4)式直接计算 S_m 。

试验的背景是一个以垂直速度 w 上升的绝热气块。在上升过程中令 $\theta_w = \text{常数}$ 。自起点开始至气块升至距起点3000米处结束计算。以方法1为基准,比较 E_T, E_{q_1} 和 E_{q_2} 方法1的时间步长取为0.25秒,其它各法的时间步长均为10秒。

(a) 暖云情况

$T_0 = 290\text{K}, q_{w0} = 10^{-3}\text{kg/kg}$ 。取 w 分别为5和15 m/s比较方法除作基准值的方法1外有方法2和方法3。表1列出了方法2和方法3的 σ_T, σ_{q_1} (标准差)。可以看出这两种方法

表1 暖云试验各种方法所得结果
相对方法1的标准差

试验号	方法	σ_T (K)	σ_{q_1} (g/kg)
No. 4.1 $w = 5\text{m/s}$	2	0.0173	0.0109
	3	0.0278	0.0092
No. 4.2 $w = 15\text{m/s}$	2	0.0804	0.0399
	3	0.0939	0.0322

差异很小,且都比较精确。这说明从总体上看,在暖云中考虑云中存在的过饱和度与否对总的计算结果影响不大。图4给出了 $w = 5\text{m/s}$ 时两种方法的误差随高度的变化。当 $q_1 \leq 6\text{g/kg}$ 时,方法2比方法3好一些;当 $q_1 > 6\text{g/kg}$ 时,方法2的误差有所增加,而方法3的误差增加不大。这是因为方法2的误差

主要由于假设 β 在时间步长内保持常数所致,而 $\beta \propto K_t \propto q_i^{1/2}$ 因此当 q_i 增大时,凝结量的计算误差为负值,且其绝对值增大。方法3的误差主要与过饱和度 S 成正比,当 $S \cdot q_i$ 相对 q_i 来说很小且不考虑冰水分配时,误差较小。

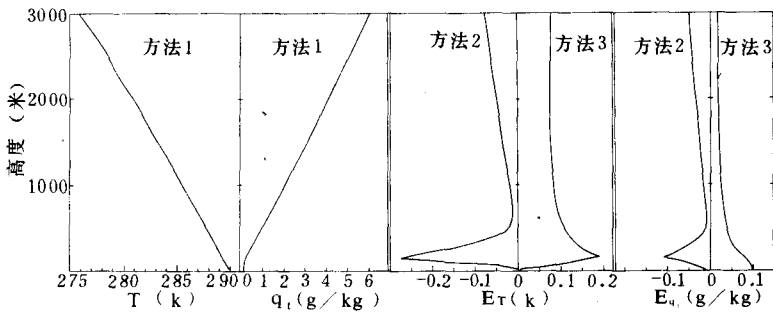


图4 暖云对比试验中的基准值与 E_T, E_{q_i} 随高度的分布

(b)冷云情况

分 $T_0 = 265K$ 和 $T_0 = 268K$ 两种情况。取 w 分别为 1、5 和 15 $m/sq_{i0} = 1g/kgq_{i0} = 10^{-5}g/kg$ 。

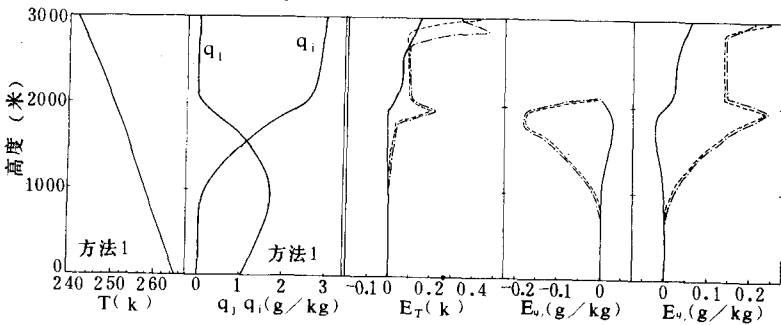


图5 冷云对比试验中的基准值和 E_T, E_{q_i}, E_{q_v} 随高度的分布

—方法2, ---方法3, -·-方法5

表2列出了各种方法在试验中的标准差。从表中可以看出方法2明显好于其它方法,有时其标准差甚至比其它方法小一个量级。从标准差来看,方法2的精度是足够的。

表2 冷云试验各种方法所得结果相对方法1的标准差

试验号	方法	σ_T (K)	σ_{q_i} (g/kg)	σ_{q_i} (g/kg)
No. 5. 1 $w=1\text{m/s}$ $T_0=265\text{K}$	2	0.0562	0.0103	0.0236
	3	0.1246	0.0688	0.0872
	4	0.1258	0.0604	0.0769
	5	0.1312	0.0695	0.0893
No. 5. 2 $w=5\text{m/s}$ $T_0=265\text{K}$	2	0.0213	0.0382	0.0418
	3	0.2620	0.2853	0.2414
	4	0.0560	0.2247	0.2177
	5	0.2347	0.2896	0.2468
No. 5. 3 $w=15\text{m/s}$ $T_0=265\text{K}$	2	0.0059	0.0159	0.0149
	3	0.0358	0.1056	0.1024
	4	0.0484	0.1111	0.1108
	5	0.0326	0.1058	0.1024
No. 5. 4 $w=5\text{m/s}$ $T_0=268\text{K}$	2	0.0032	0.0067	0.0068
	3	0.0206	0.0892	0.0856
	4	0.0317	0.0879	0.0871
	5	0.0199	0.0896	0.0859
No. 5. 5 $w=15\text{m/s}$ $T_0=268\text{K}$	2	0.0064	0.0070	0.0043
	3	0.0317	0.0415	0.0408
	4	0.0527	0.0552	0.0494
	5	0.0282	0.0415	0.0407

其它几种方法在温度较低, n_i 和 q_i 较大时误差相当大甚至出现不稳定。这是由于在这样的环境下, (4)式要求有更短的时间步长。图5绘出了 $T_0=265\text{K}$, $w=1\text{m/s}$ 时的各种方法的误差情况, 从中可以看到, 方法2在模拟冰水共存的 Bergeron 过程时也是相当精确的。

从计算所需时间来看, 方法2在每个时间步长中的工作量约为方法3的2倍左右。方法4和方法5在冷云试验中每时间步长中的迭代次数约为5次。因此方法2的工作量略大于方法3和方法5。但是试验表明, 方法2可以在较长时间步长情况下使用, 而方法3与方法5不行。特别是方法5的迭代实际上对时间步长有一定的要求, 同时收敛不佳时所积累的误差和对稳定性的影响都是需要考虑的。因此, 在实际使用时, 方法2的总计算量可能会小于方法3和方法5。即使略大一些, 考虑到性能的问题, 也是值得使用的。

三、结 语

通过上述试验结果可以看出, 我们所提出的方法适合于多种环境条件下的计算, 特别在模拟冰水共存时要明显好于一般算法。同时, 这种方法不需要迭代, 也可以使用比较大

的时间步长。我们曾在一个实际模式^[5]中使用过这种方法,其结果是令人满意的。

基于本文的工作,我们认为在一般中小尺度大气过程的数值模拟中,特别是考虑冰相时,可以使用我们所提出的方法。从精度、稳定性及工作量等方面的要求都可以说是一种好的计算方案。在暖云情形的计算中,也可以使用(17)式即本文中所称的方法3。在该种情形下,它也能保证足够的精度。

本文的大部份工作是在《气象科学研究所青年科学基金》的资助下完成的。

参 考 文 献

- [1] 胡志晋、严采(译)层状云微物理过程的数值模拟, I. 微物理模式, 气象科学研究所院刊, 1(1), 37—52, 1986.
- [2] Pruppacher, H. R. and J. D. Klett, *Microphysics of clouds and Precipitation*, D. Reidel Pub. Comp., 1978.
- [3] Koenig, L. R., Numerical modeling of ice deposition, *J. Atmos. Sci.*, **28**, 226, 1971.
- [4] Tripoli, G. J. and W. R. Cotton, The use of ice-liquid water potential temperature as a thermodynamic variable in deep atmospheric models, *Mon. Wea. Rev.*, **109**, 1094, 1981.
- [5] Colton, D. E., Numerical simulation of the orographically induced precipitation distribution for use in hydrologic analysis, *J. Appl. Meteor.*, **15**, 1241—1251, 1976.
- [6] 王谦、胡志晋、游来光, 新疆乌鲁木齐地区冬季层积云研究——数值模拟研究, 气象学报, **46**, 306—308, 1988.

A NUMERICAL SIMULATION OF CONDENSATION AND SUBLIMATION

Wang Qian Hu Zhijin

(Institute of Weather Modification, AMS)

Abstract

A numerical computational scheme with consideration of supersaturation for the simulation of condensation and sublimation is proposed. This scheme does not need iteration and can be used for simulation with a comparatively long time step. Several experiments for comparison have been done. The results obtained by this scheme are better than those with some common methods.