

理查逊数与中尺度扰动稳定性的关系

赵平 高守亭

(成都气象学院) (中国科学院大气物理所)

提 要

本文通过用摄动方法求解对数压力坐标系下原始方程组的线性解,来研究理查逊数与中尺度扰动的稳定性的关系,得出了零级近似和一级近似下对称不稳定以及零级近似下几种特殊的斜压不稳定判据。

一、引 言

理查逊数(R_i)是表示静力稳定度与风速垂直切变关系的无量纲参数。在急流发展的盛期,急流轴以下风速的垂直切变很大,在这种条件下理查逊数 R_i 常很小。计算表明,伴有强风速切变的暴雨发生前,绝大多数 R_i 已小于 $10^{[1]}$ 。在低空急流轴及暴雨区附近 R_i 基本上为负值^[2]。同时,人们也研究了一些对流性天气与 R_i 数的关系,指出当 $R_i < -2$ 时容易发生积雨云; $R_i < -1$ 容易发生雷暴;而 $-1 \leq R_i \leq \frac{1}{4}$, 容易发生系统性对流^[3]。这些研究结果均表明 R_i 数与一些剧烈的中尺度天气系统和现象有密切的关系,且 R_i 数的临界值是随系统和现象的不同而变化。

理查逊数与中尺度系统的关系在理论上可归结为与 R_i 数有关的稳定性问题。Stone^[4]和高守亭等^[5]采用 Boussinesq 近似求了方程组的零级、一级和二级近似,指出在 $R_i < 5.2$ 时二级近似会发生对称不稳定。Gambo^[6]1976年采用两层模式研究了类似问题,通过在模式中取 $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, 得出在零级近似下当 $R_i \leq 1$ 时会发生斜压不稳定,且当 R_i 的量级从 10^2 减小到 10^0 甚至更小时,中间尺度扰动猛烈发展,此时斜压不稳定扰动的波长约为1000—2000公里(相当于水平特征尺度在250—500公里范围内)。

由上述可见,以往的研究所采取的模式都有比较强的限制,从而使其结果也不具有较普遍的意义。本文在无摩擦和绝热条件下采用对数压力坐标系中普遍的原始方程组模式重新讨论这一问题。

二、方程组模式

在无摩擦、绝热条件下,对数压力坐标系中的原始方程组为:

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{R}{H}T \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w}{H} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + \gamma w = 0 \quad (2.5)$$

其中 $z = -H \ln \frac{P}{P_0}$; H 为均质大气高度, 即 $H = \frac{RT_0}{g}$; T_0 为地面温度; $\gamma = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{RT}{c_p H} = \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}$ 为静力稳定度, 在这里我们取为常数; P_0 是标准参考气压, 常取为 1000 百帕; 其它符号均为气象上的常用符号。

对(2.1)和(2.2)式求 z 的偏导数, 并利用(2.3)式, 可得

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{du}{dt} - fv \right) = -\frac{R}{H} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dv}{dt} + fu \right) = -\frac{R}{H} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.7)$$

引进小扰动

$$u = \bar{u}(z) + u'(x, y, z, t), \quad v = \bar{v}(x, y, z, t),$$

$$\varphi = \bar{\varphi}(y, z) + \varphi'(x, y, z, t), \quad w = \bar{w}(x, y, z, t),$$

$$T = \bar{T}(y, z) + T'(x, y, z, t)$$

其中带“ $\bar{\quad}$ ”的量为基本气流的物理量, 且满足地转平衡和热成风关系, 即

$$\bar{u}(z) = -\frac{1}{f} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{R}{Hf} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$$

带“ $'$ ”的量均为扰动量。

进一步假设 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} =$ 常数 A 。不难看出, 此时基本气流的温度也只是随 y 线性变化。而且这时 \bar{u} 随气压呈对数变化。

将上述扰动量代入(2.1)–(2.7)各式, 整理得

$$\frac{Du'}{Dt} + w'A - fv' = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x} \quad (2.8)$$

$$\frac{Dv'}{Dt} + fu' = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y} \quad (2.9)$$

$$D' = \frac{w'}{H} - \frac{\partial w'}{\partial z} \quad (2.10)$$

$$\frac{DT'}{Dt} = \frac{HAf}{R} v' - \gamma w' \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Du'}{Dt} + w'A - fv' \right) = -\frac{R}{H} \frac{\partial T'}{\partial z} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dv'}{Dt} + fu' \right) = -\frac{R}{H} \frac{\partial T'}{\partial y} \quad (2.13)$$

以上各式用到

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}(z) \frac{\partial}{\partial x}, \quad D' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}$$

由(2.8)和(2.9)可推出如下的涡度方程

$$\frac{D\zeta'}{Dt} - fD' - A \frac{\partial w'}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

把(2.12)和(2.13)分别对 x, y 求偏导数, 再把它们相加可得到

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{D}{Dt} D' - f\zeta' + A \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = -\frac{R}{H} \nabla^2 T' \quad (2.15)$$

其中 $\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}$.

由(2.10)、(2.11)、(2.14)和(2.15)可得到只含 w' 的方程

$$\begin{aligned} & \frac{D^2}{Dt^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{w'}{H} - \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right] + A \frac{D^2}{Dt^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w'}{\partial x} \right) \\ & + f^2 \frac{D}{Dt} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w'}{H} - \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - fA \frac{D}{Dt} \frac{\partial^2 w'}{\partial y \partial z} \\ & + 2fA^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} - 2f^2 A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w'}{H} - \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \\ & + fA \frac{D}{Dt} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w'}{H} - \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \frac{R}{H} \gamma \nabla^2 \frac{Dw'}{Dt} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

设扰动 w' 具有波动形式

$$w' = W(z) e^{i(\bar{k}x + \bar{y} + \bar{\omega}t)} \quad (2.17)$$

将上式代入(2.16)式可得到

$$\begin{aligned} & [(\bar{\sigma} + \bar{k}\bar{u})^2 - f^2] \frac{d^2 W}{dz^2} - \left[\frac{(\bar{\sigma} + \bar{k}\bar{u})^2 - f^2}{H} - \frac{2f^2 A \bar{k}}{\bar{\sigma} + \bar{k}\bar{u}} + 2fA\bar{\lambda}i \right] \frac{dW}{dz} \\ & + \left[\frac{R\gamma(\bar{k}^2 + \bar{\lambda}^2)}{H} - \frac{(\bar{\sigma} + \bar{k}\bar{u})\bar{k}A}{H} - \frac{2f^2 A \bar{k}}{H(\bar{\sigma} + \bar{k}\bar{u})} + \left(\frac{2fA^2 \bar{\lambda} \bar{k}}{\bar{\sigma} + \bar{k}\bar{u}} + \frac{fA\bar{\lambda}}{H} \right) i \right] W = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

为了便于讨论, 我们对(2.18)式进行无量纲化。

选取水平特征尺度为 L ; 扰动垂直特征尺度为 D ; 水平特征速度及垂直特征速度分别为 U_0, \bar{W} ; 特征频率为 f , 特征波数为 f/U_0 。则

$$\bar{u}(z) = U_0 u_1 = U_0 z_1, \quad W(z) = \bar{W} W_1(z_1), \quad z = Dz_1,$$

$$\frac{\bar{\partial} u}{\partial z} = \frac{U_0}{D} = A, \quad \gamma = \frac{gH}{RD} \gamma_1 (\text{为常数}),$$

$$\bar{\sigma} = f\sigma_1, \quad \bar{k} = \frac{f}{U_0} k_1, \quad \bar{\lambda} = \frac{f}{U_0} \lambda_1.$$

其中带下标“1”的量均为所对应的气象要素的无量纲量, z_1 在0到1的范围内变化。

将这些无量纲量代入方程(2.18), 并省去下标“1”, 则有

$$\begin{aligned} & \varepsilon [(\sigma + kz)^2 - 1] \frac{d^2 W}{dz^2} - \left[(\sigma + kz)^2 - \frac{2k\varepsilon}{\sigma + kz} - 1 + 2\lambda\varepsilon i \right] \frac{dW}{dz} \\ & + \left[R_1(k^2 + \lambda^2)\varepsilon - (\sigma + kz)k - \frac{2k}{\sigma + kz} + \left(\frac{2\lambda k\varepsilon}{\sigma + kz} + \lambda \right) i \right] W = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中 $R_i = \frac{gD}{U_0^2} \gamma$ 为理查逊数, $\varepsilon = \frac{H}{D}$ 为均质大气高度与扰动特征厚度的比值, 在一般情况下 ε 大于或者近似等于1。

方程(2.19)是含有无量纲理查逊数 R_i 与 ε 的无量纲方程。

三、与 R_i 有关的对称不稳定

在夏季, 我们容易看到在低空急流影响下, 若干条平行的中尺度低压、强降雨团等系统呈东西向带状分布, 而且准南北向传播, 很类似于 Eliassen 等研究过的对称不稳定^[6]。这类不稳定是假定扰动波型为 $\varphi(z)e^{i(y+\sigma t)}$ 的形式, 其能量来源是基本气流的动能^[7]。鉴于这种启示, 我们可以认为 $k \ll 1$, 这意味着扰动主要在南北方向上传播。

将 $W(z)$ 及 σ 都以 k 为小参数展开

$$W(z) = W_0(z) + kW_1(z) + \dots \quad (3.1)$$

$$\sigma = \sigma_0 + k\sigma_1 + \dots \quad (3.2)$$

$$\text{同时把(2.19)改写成算子形式} \quad LW(z) = 0 \quad (3.3)$$

其中算子

$$L = \varepsilon[(\sigma + kz)^2 - 1] \frac{d^2}{dz^2} - [(\sigma + kz)^2 - 1 - \frac{2k\varepsilon}{\sigma + kz} + 2\lambda\varepsilon i] \frac{d}{dz} + [R_i(k^2 + \lambda^2)\varepsilon + (\sigma + kz)k - \frac{2k}{\sigma + kz} + (\frac{2\lambda k\varepsilon}{\sigma + kz} + \lambda)\varepsilon i]$$

$$\text{把算子 } L \text{ 同样以 } k \text{ 展开} \quad L = L_0 + kL_1 + \dots \quad (3.4)$$

把(3.1)、(3.2)和(3.4)代入(3.3)后, 对 k^0, k^1 次幂分别有

$$k^0: \quad L_0W_0 = 0 \quad (3.5)$$

$$k^1: \quad L_0W_1 = -L_1W_0 \quad (3.6)$$

其中算子

$$L_0 = \varepsilon(\sigma_0^2 - 1) \frac{d^2}{dz^2} - [(\sigma_0^2 - 1) + 2\lambda\varepsilon i] \frac{d}{dz} + [R_i\lambda^2\varepsilon + \lambda i] \quad (3.7)$$

$$L_1 = -2\sigma_0\varepsilon(\sigma_1 + z) \frac{d^2}{dz^2} + [2\sigma_0\sigma_1 + 2\sigma_0z - \frac{2\varepsilon}{\sigma_0}] \frac{d}{dz} + [\sigma_0 + \frac{2}{\sigma_0} - \frac{2\lambda}{\sigma_0} i] \quad (3.8)$$

下面我们来求解方程(3.5)和(3.6)。

对 k^0 近似, 方程(3.5)式可写为

$$\varepsilon(\sigma_0^2 - 1) \frac{d^2W_0}{dz^2} - [(\sigma_0^2 - 1) + 2\lambda\varepsilon i] \frac{dW_0}{dz} + [R_i\lambda^2\varepsilon + \lambda i]W_0 = 0 \quad (3.9)$$

$$\text{在零级近似下边界条件为 } W_0|_{z=1} = 0 \quad (3.10)$$

方程(3.9)的通解为

$$W_0 = A_1e^{r_1z} + B_1e^{r_2z} \quad (3.11)$$

其中

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{[(\sigma_0^2 - 1) + 2\lambda e i + \sqrt{(\sigma_0^2 - 1)^2 - 4R_i \lambda^2 e^2 (\sigma_0^2 - 1) - 4\lambda^2 e^2}]}{2(\sigma_0^2 - 1)e} \\ r_2 &= \frac{[(\sigma_0^2 - 1) + 2\lambda e i - \sqrt{(\sigma_0^2 - 1)^2 - 4R_i \lambda^2 e^2 (\sigma_0^2 - 1) - 4\lambda^2 e^2}]}{2(\sigma_0^2 - 1)e} \end{aligned}$$

A_1, B_1 为待定系数。

利用边界条件(3.10)可得到

$$r_1 - r_2 = 2n\pi i \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.12)$$

其中 n 为扰动在垂直方向上的波数^[5]。

由(3.12)我们可以得到

$$\sigma_0^2 = \frac{(4n^2\pi^2 e^2 + 1 + 2R_i \lambda^2 e^2 \pm \sqrt{4R_i^2 \lambda^4 e^4 + 4\lambda^2 (4n^2\pi^2 e^2 + 1)e^2})}{4n^2\pi^2 e^2 + 1} \quad (3.13)$$

如果 σ_0 有虚部存在,则必须有 $\sigma_0^2 < 0$,即

$$\frac{(4n^2\pi^2 e^2 + 2R_i \lambda^2 e^2 + 1) - 2\sqrt{R_i^2 \lambda^4 e^4 + \lambda^2 (4n^2\pi^2 e^2 + 1)e^2}}{4n^2\pi^2 e^2 + 1} < 0$$

由此可得出
$$R_i < 1 - \frac{n^2\pi^2}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2 e^2} \quad (3.14)$$

令
$$R_{ic}^{(n)} = 1 - \frac{n^2\pi^2}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2 e^2} \quad (3.15)$$

则(3.14)式可表为
$$R_i < R_{ic}^{(n)} \quad (3.16)$$

上式表明当理查逊数 R_i 小于其临界值 $R_{ic}^{(n)}$ 时,将出现对称不稳定。

由于 $\bar{\lambda} = \frac{f}{U_0} \lambda = \frac{2\pi}{L}$, 其中 $\bar{L} = 4L$ 为波长,因而

$$\lambda = \frac{\pi}{2} R_0 \quad (3.17)$$

其中 R_0 为 Rossby 数, $R_0 = \frac{U_0}{fL}$ 。可以看出 λ 与 R_0 有相同量级。所以(3.15)又可表示为

$$R_{ic}^{(n)} = 1 - \frac{4n^2}{R_0^2} = \frac{D^2}{\pi^2 R_0^2 H^2} \quad (3.18)$$

从上式中可以看出, $R_{ic}^{(n)}$ 的上界为1,即 $R_{ic}^{(n)} \leq 1$; 并且 $R_{ic}^{(n)}$ 不是常数,它不仅与 Rossby 数和扰动特征厚度 D 有关,而且还与均质大气厚度以及扰动垂直波数 n 有关。当扰动尺度较小(R_0 数较大)、扰动浅薄(D 小)时, $R_{ic}^{(n)}$ 大,使 $R_i < R_{ic}^{(n)}$ 条件易成立;当垂直波数 n 大时, $R_{ic}^{(n)}$ 变小,不易满足条件 $R_i < R_{ic}^{(n)}$;同时均质大气厚度的影响也不可忽略, $R_{ic}^{(n)} \propto -1/H^2$,当地面平均温度 T_0 高时,均质大气厚度大,从而使 $R_{ic}^{(n)}$ 也大,容易使条件(3.16)被满足,可见在夏季和热带地区容易出现对称不稳定。

对中尺度扰动, R_0 为 $O(1)$, $\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{D}{H}\right)^2 \ll 1$, 并且取 $n=0$, 则可以近似有 $R_{ic}^{(0)} \approx 1$, 这时出现对称不稳定的条件变为 $R_i < 1$ 。这个结果与 Stone^[4] 所得结果较一致; Gambo^[6] 的结果在形式上与本文结果相似,为 $R_i \leq 1$, 但所反映的物理本质却不同,他是研究斜压不稳定时得的结果。在 $n=1$ 时, $R_{ic}^{(1)} \approx -3$, 此时产生对称不稳定的条件为 $R_i < -3$ 。这个结果与高守亭等得的 $R_i < -8.9$ 相比,条件更容易满足。

下面我们进一步求解一级近似(3.6)式,即

$$\begin{aligned}
 e(\sigma_0^2 - 1) \frac{d^2 W_1}{dz^2} - [(\sigma_0^2 - 1) + 2\lambda e i] \frac{dW_1}{dz} + [R_i \lambda^2 e + \lambda i] W_1 \\
 = -2\sigma_0 e(\sigma_1 + z) \frac{d^2 W_0}{dz^2} + [2\sigma_0 \sigma_1 + 2\sigma_0 z - \frac{2e}{\sigma}] \frac{dW_0}{dz} \\
 + [\sigma_0 + \frac{2}{\sigma_0} - \frac{2\lambda e}{\sigma_0} i] W_0
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

这是一个常系数非齐次方程, 设其解为

$$f(z) = z(C_1 z + D_1)e^{r_1 z} + z(E_1 z + F_1)e^{r_2 z} \quad (3.20)$$

将(3.20)代入(3.19)式可求得

$$C_1 = \frac{\sigma_0(r_1 - r_2^2 e)}{m}$$

$$D_1 = \frac{-2\sigma_0 \sigma_1 r_1^2 e + 2\sigma_0 \sigma_1 r_1 - \frac{2e}{\sigma_0} r_1 + (\sigma_0 + \frac{2}{\sigma_0} - \frac{2\lambda e}{\sigma_0} i) - \frac{2(\sigma_0^2 - 1)\sigma_0(r_1 - r_2^2 e)e}{m}}{m}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_0(r_2 - r_2^2 e)}{m}$$

$$F_1 = \frac{-2\sigma_0 \sigma_1 r_2^2 e + 2\sigma_0 \sigma_1 r_2 - \frac{2e}{\sigma_0} r_2 + (\sigma_0 + \frac{2}{\sigma_0} - \frac{2\lambda e}{\sigma_0} i) + \frac{2(\sigma_0^2 - 1)\sigma_0(r_2 - r_2^2 e)e}{m}}{m}$$

其中 $m = \sqrt{(\sigma_0^2 - 1)^2 - 4R_i \lambda^2 e^2 (\sigma_0^2 - 1) - 4\lambda^2 e^2}$

因此(3.19)式的通解可写为

$$W_1 = Ae^{r_1 z} + Be^{r_2 z} + z(C_1 z + D_1)e^{r_1 z} + z(E_1 z + F_1)e^{r_2 z} \quad (3.21)$$

在一级近似下应满足边界条件

$$W_1|_{z=0} = 0 \quad (3.22)$$

由(3.21)和(3.22)可以得到

$$C_1 + D_1 + E_1 + F_1 = 0 \quad (3.23)$$

将 C_1, D_1, E_1 和 F_1 代入上式, 可得

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sigma_0^2 + 1}{2\sigma_0^2 \left\{ \frac{R_i}{\sigma_0^2 - 1} + \frac{2}{(\sigma_0^2 - 1)^2} \right\} \lambda^2 e} \quad (3.24)$$

从上式可看出, σ_1 恒为实数, 即在一级近似下扰动对所有 R_i 值均为中性。对较小尺度的扰动 ($\lambda \gg 1$), 由(3.24)可得到 $\sigma_1 \approx -\frac{1}{2}$, 该结果与高守亨等^[5]的结果一致。

以上我们着重讨论了在 $k \ll 1$ 时对称不稳定发生的判据。

四、与 R_i 有关的斜压不稳定

人们在观测中发现除了象前一部分所描述的准南北向移动的中尺度系统外, 还有许多沿低层 850—500 百帕之间的平均基本气流方向移动, 可近似认为沿东西方向移动。这种系统类似于 Charney^[8]、Eady^[9] 等研究过的斜压不稳定, 它假定扰动波型为 $\varphi(z)e^{i(kx + \sigma t)}$ 的形式, 其能量来源是基本气流的有效位能。后来 Gambo^[6] 用于研究中尺度系统。因此, 可以认

为,当 $\lambda \ll 1$ 时,中尺度沿东西向传播,这时所发生的不稳定将是斜压不稳定。

在 $\lambda \ll 1$ 时,以 λ 为小参数将 σ, W 展开

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \dots \quad (4.1)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \lambda \sigma_1 + \dots \quad (4.2)$$

将(4.1)–(4.2)代入(3.3),有如下零级近似

$$\begin{aligned} \varepsilon[(\sigma_0 + kz)^2 - 1] \frac{d^2 W_0'}{dz^2} - [(\sigma_0 + kz)^2 - 1 - \frac{2\varepsilon k}{\sigma_0 + kz}] \frac{dW_0'}{dz} \\ + [R_1 k^2 \varepsilon - (\sigma_0 + kz)k - \frac{2k}{\sigma_0 + kz}] W_0' = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

令 $\sigma_0 = kC_z$, 上式可变为

$$\begin{aligned} \varepsilon[k^2(C_z + z)^2 - 1] \frac{d^2 W_0'}{dz^2} - [k^2(C_z + z)^2 - 1 - \frac{2\varepsilon}{C_z + z}] \frac{dW_0'}{dz} \\ + [R_1 k^2 \varepsilon + (C_z + z)k^2 - \frac{3}{C_z + z}] W_0' = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

不难看出,上式是变系数常微分方程,比较复杂,很难求得完整的解析解,我们下面求它的近似解。

在实际大气中,有些准东西向传播的中尺度扰动移动较快,即 C_z 较大。而 z 的范围在0和1之间,因而可以认为 $|C_z| \gg z$ (C_z 为 C_z 的实部),同时考虑波数 k 大于或近似于1的情况,在这些条件下方程(4.4)可简化为

$$\varepsilon C_z^2 \frac{d^2 W_0'}{dz^2} - C_z^2 \frac{dW_0'}{dz} + (R_1 \varepsilon = \beta_z) W_0' = 0 \quad (4.5)$$

此方程为常系数齐次微分方程,其通解为

$$W_0' = A_2 e^{r_3 z} + B_2 e^{r_4 z} \quad (4.6)$$

其中

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{C_z + \sqrt{C_z^2 - 4R_1 \varepsilon^2 + 4C_z}}{2C_z} \\ r_4 &= \frac{C_z - \sqrt{C_z^2 - 4R_1 \varepsilon^2 + 4C_z}}{2C_z} \end{aligned}$$

A_2, B_2 为任意常数。

$$\text{利用边界条件 } W_0'|_{z=1} = 0 \quad (4.7)$$

$$\text{得 } r_3 - r_4 = 2n\pi i \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

由此可得到

$$C_z = \frac{-2 \pm 2\varepsilon \sqrt{1 + R_1(1 + 4n^2\pi^2)}}{1 + 4n^2\pi^2} \quad (4.8)$$

$$\text{取 } n = 0, \text{ 则 } C_z = -2 \pm 2\sqrt{1 + R_1} \quad (4.9)$$

从(4.9)式可看到 $|C_z| \gg z$ 条件可以被满足。当 $R_1 < -1$ 时, C_z 具有虚部出现,即 σ_0 出现虚部,扰动将发生斜压不稳定。可见,对于沿着中纬度平均基本气流近似东西向移动较快的中尺度扰动,在理查逊数 $R_1 < -1$ 时将出现斜压不稳定。这个结果可能解释一些雷暴系统的发生发展机制。

为了讨论更一般的情况,我们用差分方法求方程(4.3)的近似解。

为简单起见,把大气垂直分成两层(如下图)。将方程(4.3)写在 $z_1 = \frac{1}{2}$ 层上

$$e[(\sigma'_0 + kz_1)^2 - 1] \left(\frac{d^2 W'_0}{dz^2} \right)_{z_1} - [(\sigma'_0 + kz_1)^2 - \frac{2ke}{\sigma'_0 + kz_1} - 1] \left(\frac{dW'_0}{dz} \right)_{z_1} + [R_i k^2 e - (\sigma'_0 + kz_1)k - \frac{2k}{\sigma'_0 + kz_1}] (W'_0)_{z_1} = 0 \tag{4.10}$$

而

$$\frac{d^2 W'_0}{dz^2} = \frac{W'_{03} + W'_{01} - 2W'_{02}}{(\Delta z)^2} = -8W'_{02} \tag{4.11}$$

$$\frac{dW'_0}{dz} = \frac{W'_{03} - W'_{01}}{2\Delta z} = 0 \tag{4.12}$$

其中用到上下边界条件 $W'_{03} = 0, W'_{01} = 0$ 。

由(4.10)–(4.12)得到

$$8e[(\sigma'_0 + kz_1)^2 - 1] - [R_i k^2 e - (\sigma'_0 + kz_1)k - \frac{2k}{\sigma'_0 + kz_1}] = 0 \tag{4.13}$$

令 $\sigma'_0 + kz_1 = \tilde{\sigma}_0 - \frac{k}{24e}$, 则(4.13)可化为卡尔丹方程

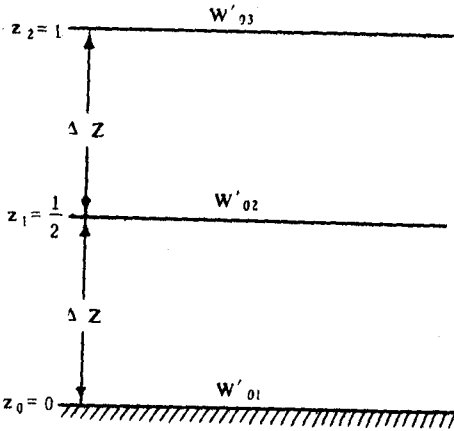
$$\tilde{\sigma}_0^3 + p\tilde{\sigma}_0 + q = 0 \tag{4.14}$$

其中 $p = -\left(1 + \frac{k^2}{192e^2} + \frac{R_i k^2}{8}\right)$

$$q = 2\left(\frac{k}{24e}\right)^3 + \frac{R_i k^3}{192e} + \frac{7k}{24e}$$

由(4.14)式根性质的判别式 $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2$

+ $\left(\frac{p}{3}\right)^3$ 可知,当 $\Delta > 0$ 时,(4.14)有虚数根存在,即 σ'_0 有虚根,这时会出现中尺度扰动的斜压不稳定。下面我们讨论几种特殊的中尺度扰动。在讨论中取 $k = 1$ 。



大气垂直分层图

1. 扰动垂直特征厚度与均质大气标高(一般为8–9公里)有相同量级时,所对应的中尺度扰动比较深厚。在这种条件下,用数值方法由 $\Delta > 0$ 可求出,当 $R_i < -1.6$ 时 σ'_0 有虚根出现,即中尺度扰动发生斜压不稳定。这个条件在实际中容易达到,正如本文引言中所提到的在 $R_i < -2$ 时易发生深厚的积雨云系统。

2. 对 $e \gg 1$, 即扰动垂直特征厚度较小。这时 $p \approx -\left(1 + \frac{R_i}{8}\right), q \approx 0$

由 $\Delta > 0$ 可求得 $R_i < -8$ 时将发生中尺度斜压不稳定。然而,在实际大气中,这个条件不易被满足。

可见,对于比较深厚的中尺度扰动,在 $R_i < -1.6$ 时会出现斜压不稳定。而对于浅薄

的中尺度扰动出现斜压不稳定的判据为 $R_i < -8$ 。

以上我们讨论了 $\lambda \ll 1$ 时,用 R_i 数表示斜压不稳定判据的几种近似解情况。

五、结 论

本文采用对数压力坐标系中的原始方程组,通过求线性解方法,讨论了与理查逊数 R_i 有关的对称不稳定和斜压不稳定。得出以下结论:

1. 在零级近似下出现对称不稳定的条件为 $R_i < R_i^{(s)}$ 。其中临界理查逊数 $R_i^{(s)} \leq 1$,并且是与大气的垂直波数、Rossby 数、扰动特征厚度以及均质大气厚度有关的变数。对于最简单的中尺度扰动的垂直结构, $R_i^{(s)} \approx 1$,其判据变为 $R_i < 1$ 。

2. 在讨论对称不稳定的一级近似时,发现对任何理查逊数,扰动均为中性。

3. 对近似于东西向移动较快的中尺度扰动,在 $R_i < -1$ 时容易发生斜压不稳定;对较深厚的中尺度扰动,当 $R_i < -1.6$ 时会发生斜压不稳定;而浅薄的中尺度扰动不易出现斜压不稳定,其判据为 $R_i < -8$ 。

参 考 文 献

- [1] 田生春等,北京地区暴雨时各层温湿、风的统计特征,大气科学,7,1,1983.
- [2] 孙淑清等,低空急流的不稳定性及其对暴雨的触发作用,大气科学,4,4,1980.
- [3] 杨大升等,动力气象学,324—326,气象出版社,1980年.
- [4] Stone, P. H., On non-Geostrophic Baroclinic stability, *J. Atmos. Sci.*, 23, 4, 390—400, 1966.
- [5] 高守亭等,应用理查逊数判别中尺度波动的不稳定,大气科学,10,2,1986.
- [6] Gambo, K., The characteristics feature of Medium-Scale disturbances in the atmosphere (I), *J. Met. Soci. Japan.*, 48, 173—184, 1976.
- [7] 小仓义光,大气动力学原理,167—170. 科学出版社,1981.
- [8] Charney, J. G., The dynamics of long waves in baroclinic westerly current, *J. Met.*, 4, 5, 1947.
- [9] Eady, E. T., long waves and cyclone waves, *Tellus*, 1, 3, 1949.

THE RELATIONS BETWEEN RICHARDSON NUMBER AND THE STABILITY OF MESOSCALE PERTURBATIONS

Zhao Ping

(Changtu Institute of Meteorology)

Gao Shouting

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, the relations between the Richardson number and the stability of mesoscale perturbations are acquired by linearly solving the primitive equations in the log-pressure coordinate system with expansion of the small parameters, and then the symmetrically instability criteria under conditions of zero-order and first-order approximations and the baroclinic instability criteria under conditions of zero-order approximations are discussed.