第 4 卷 第 3 期 气象科学研究院院刊 Vol. 4, №3
1989 年 10 月 JOURNAL OF ACADEMY OF METEOROLOGICAL SCIENCE Oct. 1989

消除半隐式积分方案中的 Helmholtz 方程的一个方法

姚建国
（北京气象中心）

在原始方程模式的显式积分中，为使高频重力波保持计算稳定性，时间步长必须取得很小以满足 CFL 稳定性判据。半隐式积分方案较之显式积分可以使用较大的时间步长，因而提高了计算效率。但是，与半隐式方案相伴随的是要解一 Helmholtz 方程，这个方程的求解在积分过程中占有相当比重，这一点在差分模式中尤其明显。因此，消除 Helmholtz 方程是进一步提高时间积分效率的一个重要方面。

在这方面已有一些工作。Cohn 等[1]（1985）在 Crank－Nicolson 方案的基础上提出一个全隐式的积分方案，即将 Crank－Nicolson 方案中隐式部分的非线性项作 Taylor 展开，这样，可以避免用迭代法求解非线性方程，而只需求解一线性方程组。此外，为避免矩阵求逆的计算，采用分式步长法（fractional step method），使一线性方程组变成对角线形式，从而可以快速求解。Tanguag 和 Robezt[2]（1986）将分式步长法应用于半隐式积分，从而消除了其中的 Helmholtz 方程。其要点是：

将浅水波方程中的连续性方程写成如下形式：

$$\frac{d}{dt}(\Phi + \mu) + \Phi_0 \overline{D}^t + (\Phi - \Phi_0)D = 0 \tag{1}$$

其中：$\mu = \Phi_0^2 \Delta t^4 S \frac{\partial^2}{\partial x^2}(S \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2})$

$S = m^2$，m 为地图投影系数；

Φ 为位势高度，D 为水平散度。

使用 Euler 半隐式，最后可得到如下关于 Φ 的方程

$$[\Phi - \Delta t^2 \Phi_0 S(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}) + \Phi_0^2 \Delta t^4 S \frac{\partial^2}{\partial x^2}(S \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2})]_{t+\Delta t} = H \tag{2}$$

H 为已知量。

上述方程中如果没有含 Δt^4 的一项，该方程即为一般半隐式格式中的 Helmholtz 方程。加入这一项后，方程可写成如下形式：

$$[1 - \Delta t^2 \Phi_0 S \frac{\partial^2}{\partial x^2}][1 - \Delta t^2 \Phi_0 S \frac{\partial^2}{\partial y^2}]\Phi_{t+\Delta t} = H$$

这个方程可以快速求解。如空间差分采用中央差，则上述方程等价于二个三对角线方程组，而三对角线方程组是有快速方便的解法的（如追赶法，循环消去法等）。数值试验表明，

本文1988年5月30日收到。

在 Euler 半隐式积分中，对浅水波方程做半球24小时预报，使用上述方案可较一般半隐式方案节省30%的计算时间[2]。这个方案同样也可应用于半 Lagrange 半隐式积分中。

上述方法虽然可以提高计算效率，但有一个明显的不足之处，即不够精确。方程(1)中加入 μ 值是没有物理意义的，因而必然要带来误差。为减小这一误差，要求 μ 值较小，从而 Δt 取值也不能太大。数值试验也表明，该方法应用于半 Lagrange 半隐式积分时，若取时间步长 Δt 大于40分钟，则预报结果较差。因而一般只能取 $\Delta t \leqslant 40$分钟[2]。μ 值引入的误差在散度场的计算上尤为明显，即使取较小的 Δt 也是这样。这一点在斜压模式中不容忽视，因为散度场与降水过程密切相关。因此，该方案应用于斜压模式对降水预报必然有影响。Yakimiw 和 Robert[3](1986)对 Cohn 等提出的全隐式方案做的理论分析及数值计算也表明，当时间步长取得较大时(如取 Δt 为30分钟)，该方案在相速度计算上有不容忽视的误差。可以认为，这个误差主要是由于使用了分式步长法造成的。

因此，上述方法应用于半 Lagrange 半隐式积分时，虽然半 Lagrange 方法是无条件稳定的，但出于精度的要求，时间步长也不能取得太大，这样就限制了半 Lagrange 方法的效率。为提高计算精度，提出如下方法：

仅以 Euler 半隐式积分为例。同样也适用于半 Lagrange 方法和 Cohn 等提出的全隐式积分方案。

浅水波方程组是：

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} - fV + \dfrac{\partial \overline{\Phi}^t}{\partial x} + K\dfrac{\partial S}{\partial x} = 0 & (3) \\ \dfrac{dV}{dt} + fU + \dfrac{\partial \overline{\Phi}^t}{\partial y} + K\dfrac{\partial S}{\partial y} = 0 & (4) \\ \dfrac{d\Phi}{dt} + \Phi_0 \overline{D}^t + (\Phi - \Phi_0)D = 0 & (5) \end{cases}$$

其中：$(U,V) = (\frac{u}{m},\frac{v}{m})$，

m 为地图投影系数，$S = m^2$，

$K = \frac{1}{2}(U^2 + V^2)$

$D = S(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y})$为水平散度，

Φ 为自由面位势高度，Φ_0为其平均值。

使用半隐式，即

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t}[F(t + \Delta t) - F(t - \Delta t)]$$

$$\overline{F}^t = \frac{1}{2}[F(t + \Delta t) + F(t - \Delta t)]$$

最后可得到 Helmholtz 方程：

$$[\Phi - \Delta t^2 \Phi_0 S(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2})]_{t+\Delta t} = H \tag{6}$$

方程两端同时加上 $\mu = \Delta t^4 \Phi_0^2 S \frac{\partial^2}{\partial x^2}(S\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2})$，

从而方程可写成分裂形式：

$$[1-\Delta t^2\Phi_0 S\frac{\partial^2}{\partial x^2}][1-\Delta t^2\Phi_0 S\frac{\partial^2}{\partial y^2}]\Phi_{t+\Delta t}=H+\Delta t^4\Phi_0^2 S\frac{\partial^2}{\partial x^2}(S\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}) \tag{7}$$

对于这方程提出如下二种解法：

1. 方程(7)右端的 μ 值写在 t 时刻，从而有：

$$[1-\Delta t^2\Phi_0 S\frac{\partial^2}{\partial x^2}][1-\Delta t^2\Phi_0 S\frac{\partial^2}{\partial y^2}]\Phi_{t+\Delta t}=H+\alpha\Delta t^4\Phi_0^2 S\frac{\partial^2}{\partial x^2}(S\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2})_t \tag{8}$$

这样，方程右端可以计算出来，从而方程可以求解了。这里引入一系数 α，主要是起控制符号的作用。即当 t 及 $t+\Delta t$ 时刻，μ 值符号相同时，取 $\alpha>0$，反之则取 $\alpha<0$。为判断 $t+\Delta t$ 时刻 μ 值符号可以先求解方程(2)作估计。

如果要更精确，可以用下述迭代法求解。

2. 将方程(7)写成迭代形式，有：

$$[1-\Delta t^2\Phi_0 S\frac{\partial^2}{\partial x^2}][1-\Delta t^2\Phi_0 S\frac{\partial^2}{\partial y^2}]\Phi_{t+\Delta t}^{(k+1)}=H+\alpha\Delta t^4\Phi_0^2 S\frac{\partial^2}{\partial x^2}(S\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2})^{(k)} \tag{9}$$

其中 α 为迭代系数，k 为迭代次数。

迭代初值如取 t 时刻的值，即为方法1。迭代初值也可取方程(2)的解。

如果只迭代一次，就有：

$$[1-\Delta t^2\Phi_0 S\frac{\partial^2}{\partial x^2}][1-\Delta t^2\Phi_0 S\frac{\partial^2}{\partial y^2}]\Phi_{t+\Delta t}=H+\alpha\Delta t^4\Phi_0^2 S\frac{\partial^2}{\partial x^2}(S\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial y^2}) \tag{10}$$

Φ^* 为方程(2)的解。这类似于预估一校正方法。

这里提出的方法较之 Tanguay 等的方法要精确些，因而可以使用较大的时间步长，虽然增加了一些计算量，但总效率可能还是提高了，这些都需要做数值试验进一步分析验证。

作者得到了廖洞贤先生热情指导和鼓励，在此表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] Cohn, S. E. et al., A fully implicit scheme for the barotropic primitive equations. *Mon. Wea. Rev.*, **113**, 436—448, 1985.

[2] Tanguay, M. and A. Robert, Elimination of the Helmholtz equation associated with the semi-implicit scheme in a grid point model of shallow water equations. *Mon. Wea. Rev.*, **114**, 2154—2162, 1986.

[3] Yakimiw, E. and A. Robert, Accuracy and stability analysis of a fully implicit scheme for the shallow water equations. *Mon. Wea. Rev.*, **114**, 240—244, 1986.