

两种在有限区域内进行 2-维谱展开的方法

廖洞贤

(国家气象局国家气象中心)

提 要

提出了两种在有限区域内进行 2-维谱展开的方法。其中一个适用于直角坐标,一个适用于球面坐标。还对用这两种方法解 Helmholtz 方程的问题进行了讨论。

一、引 言

近年来由于全球(或半球)谱模式的广泛应用,有限区域谱模式也开始进行研究试验^{(1),(2)}。于是,如何在有限区域内进行谱展开的问题提上了日程。

在有限区域内进行谱展开有不少困难。其中主要有:气象要素在区域内的分布一般并不是周期的,不能直接用周期函数作基函数。因此,有必要把气象要素中的非周期成份分离出来,使剩下的部份成为周期的。要达到这个目的有很多方法,如构造满足边界条件和齐次的预报方程的函数等。但这样的函数一般并不合乎数值天气预报的需要,只有那些比较简单并在模式中使用方便,使不致因为它的影响造成时间积分困难,或需增加较大运算量的函数才是理想的。

根据上述设想,文献[2]曾提出在直角坐标的有限区域中进行 2-维谱展开的方法。在本文中,作者将在其基础上进一步进行修正,补充。考虑在以全球谱模式作粗网格模式时,如与之嵌套的有限区域谱模式也采用球面坐标有特别方便之处,还提出了在球面坐标中的有限区域内用球谱函数进行谱展开的方法。

二、在直角坐标中的情形

1. 在有限区间中的 1-维谱展开

设 F 是某一气象要素。如欲在 x 方向的有限区间 $[x_A, x_B]$ 内将它作 Fourier 展开,如上所述,须将其中非周期成份分离出来。这可以采用文献[2]中的方法,即令

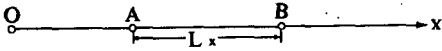


图1 x方向的有限区间

$$F(x) = \bar{F}(x) + F'(x) \tag{1}$$

其中
$$\bar{F}(x) = \frac{x - x_A}{L_x} \Delta_x F \tag{2}$$

$$\Delta_x F = F(x_B) - F(x_A)$$

易见,这时 $F'(x)$ 在边界点 A, B 上恒等于 $F(x_A)$ 。于是,我们可以把 $F'(x)$ 表示为

$$F'(x) = \sum_{m=-l_m}^{l_m} F^m \exp[Im_1(x - x_A)] \tag{3}$$

其中 l_m 是在 X 方向所取的最大波数, $l = \sqrt{-1}, m_1 = 2m\pi/L_x$

$$F^m = \frac{1}{L_x} \int_{x_A}^{x_B} F'(x) \exp[-Im_1(x - x_A)] dx \tag{4}$$

把(3)式代入(1)式,则有

$$F(x) = \bar{F}(x) + \sum_m F^m \exp[Im_1(x - x_A)] \tag{5}$$

这里 $\sum_m = \sum_{m=-l_m}^{l_m}$

注意,这里所取 x 方向可以是任一坐标系的某一方向;既可以是直角坐标的某一方向,也可以是曲线坐标的某一方向。

2. 在有限区域中的 2-维谱展开

设有限区域是矩形 R_R , 如图 2 所示,其四个角点的坐标各为 $(0, 0), (x_M, 0), (0, y_N)$ 和 (x_M, y_N) 。这时, F 的展开可以分两步进行,即先沿 x 方向展开,再沿 y 方向展开。

按照图 2, (5)式可以改写为

$$F(x, y) = \bar{F}(x, y) + \sum_m F^m(y) \exp(Im_1 x) \tag{6}$$

其中

$$\bar{F}(x, y) = \frac{x}{L_x} \Delta_x F, L_x = x_M$$

$$\Delta_x F = F(x_M, y) - F(0, y)$$

如沿 y 方向,也采用和 x 方向类似的办法

从 F 中分离非周期成份,可以令

$$F^m(y) = F_1^m(y) + F_2^m(y) \tag{7}$$

其中

$$F_1^m(y) = \frac{y}{L_y} \Delta_y F^m, L_y = y_N, \Delta_y F^m = F^m(y_N) - F^m(0)$$

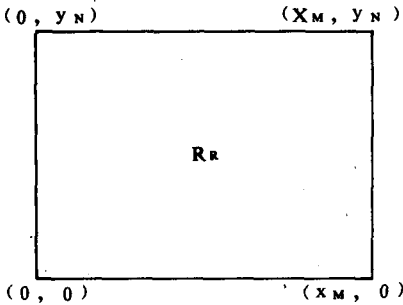


图2 矩形区域 R_R

易见,这时, $F_2^m(y)$ 在 $y = 0, y_N$ 处恒等于 $F^m(0)$ 。于是,和 F' 相似, $F_2^m(y)$ 也可以作 Fourier 展开,即

$$F_2^m(y) = \sum_{n=-l_N}^{l_N} F_n^m \exp(In_1 y) \tag{8}$$

其中

$$n_1 = 2\pi n / L_y$$
$$F_n^m = \frac{1}{L_y} \int_0^{y_N} F_2^m(y) \exp(-In_1 y) dy \tag{9}$$

如果 $\Delta_x F$ 沿 y 方向也作如(7)式的分解,

即
$$\Delta_x F = \Delta_{x_1} F + \Delta_{x_2} F \tag{10}$$

其中

$$\Delta_{x_1} F = \frac{y}{L_y} \Delta_y \Delta_x F$$
$$\Delta_y \Delta_x F = \Delta_x F|_{y=y_N} - \Delta_x F|_{y=0}$$
$$= F(x_{M_1}, y_N) - F(0, y_N) - F(x_{M_1}, 0) + F(0, 0)$$

则 $\Delta_{x_2} F$ 也可以展开为

$$\Delta_{x_2} F = \sum_n (\Delta_2 F)_n \exp(In_1 y) \tag{11}$$

其中

$$(\Delta_2 F)_n = \frac{1}{L_y} \int_0^{y_N} \Delta_{x_2} F \exp(-In_1 y) dy$$
$$\sum_n = \sum_{n=-l_N}^{l_N}$$

l_N 是 y 方向的最大波数。

把(6)-(12)合并,则 $F(x, y)$ 在矩形区域 R_R 内的展开式可以写成

$$F(x, y) = \frac{xy}{L_x L_y} \Delta_y \Delta_x F + \frac{x}{L_x} \sum_n (\Delta_2 F)_n \exp(In_1 y)$$
$$+ \frac{y}{L_y} \sum_m \Delta_y F^m \exp(Im_1 x)$$
$$+ \sum_m \sum_n F_n^m \exp[I(m_1 x + n_1 y)] \tag{13}$$

3. Helmholtz 方程的解

在数值天气预报中当引用半隐式格式时,往往要解 Helmholtz 方程。如对 F 采用(13)形式的谱展开,其解会是怎样的呢? 这是需要研究的问题。

设有如下形式的,以 u 为未知函数,以 G 为源函数的,定义在矩形 R_R 内的 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 - a^2)u = G \tag{14}$$

其中 u 和 G 均是 x, y 的函数。

解上述方程的边界条件取作

$$u|_r = g(x, y) \quad (15)$$

其中 $g(x, y)$ 是在某一定边界条件下, 在比 R_R 大得多的区域 R_1 内求得的同一方程在 Γ 处的解 u , 即

$$g(x, y) = u_1|_r = (\nabla^2 - a^2)^{-1}G|_r \quad (16)$$

当然, 这时 u_1 和 G 也定义在 R_1 内。这里 Γ 是 R_R 的边界, $(\nabla^2 - a^2)^{-1}$ 是 $\nabla^2 - a^2$ 的逆算子。以下, 我们来求方程(14)的解。

根据上面的讨论, 我们可以寻求如(13)式形式的解。令

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{G}\right) &= \frac{xy}{L_x L_y} \Delta_y \Delta_x \left(\frac{u}{G}\right) + \frac{x}{L_x} \sum_n (\Delta_2 \left(\frac{u}{G}\right))_n \exp(In_1 y) \\ &+ \frac{y}{L_y} \sum_m \Delta_y \left(\frac{u}{G}\right)^m \exp(Im_1 x) \\ &+ \sum_m \sum_n \left(\frac{u}{G}\right)_n^m \exp[I(m_1 x + n_1 y)] \end{aligned} \quad (17)$$

并代入方程(14), 经过一系列运算, 我们可以得到解的表达式, 即

$$\begin{aligned} u_{n_1}^{m_1} &= -\frac{1}{m_1^2 + n_1^2 + a^2} \left\{ G_{n_1}^{m_1} - \frac{1}{m_1 n_1 L_x L_y} \Delta_y \Delta_x (G + a^2 u) \right. \\ &- \frac{1}{Im_1 L_x} [(\Delta_2 G)_n + (n_1^2 + a^2)(\Delta_2 u)_n] \\ &- \left. \frac{1}{In_1 L_y} [\Delta_y G^m + (m_1^2 + a^2)\Delta_y u^m] \right\} \quad \text{当 } m_1, n_1 \neq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} u_0^0 &= \frac{1}{a^2} \left\{ G_0^0 + \frac{1}{4} \Delta_y \Delta_x (G + a^2 u) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} [(\Delta_2 (G + a^2 u))_0 + \Delta_y (G + a^2 u)_0^0] \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} u_{n_1}^0 &= -\frac{1}{n_1^2 + a^2} \left\{ G_{n_1}^0 - \frac{1}{2In_1 L_y} \Delta_y \Delta_x (G + a^2 u) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} (\Delta_2 (G + (n_1^2 + a^2)u))_n - \frac{1}{In_1 L_y} \Delta_y (G + a^2 u)_0^0 \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} u_0^{m_1} &= -\frac{1}{m_1^2 + a^2} \left\{ G_0^{m_1} - \frac{1}{2Im_1 L_x} \Delta_y \Delta_x (G + a^2 u) \right. \\ &- \left. \frac{1}{Im_1 L_x} (\Delta_2 (G + a^2 u))_0 + \frac{1}{2} \Delta_y (G + (m_1^2 + a^2)u)_{m_1} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

在上面(18)–(21)各式的右端的大括号中, 除第一项 $G_{n_1}^{m_1}$ 等外, 其他项都只和边值有关。所以, 解 $u_{n_1}^{m_1}$ 等完全由已知函数所确定。

三、在球面坐标中的情形

1. 在有限区域中的 2-维谱展开

设在球面上有有限区域 R_0 , 它是由经线 $\lambda = \lambda_1$ 和 $\lambda = \lambda_2$ 从北极点 N 到南极点 S 所围的地区。其中 $\lambda_2 - \lambda_1 = 2\pi/l$, l 是一大于 1 的正整数(图 3)。

按照(5)式, 气象要素 F 沿纬圈方向的展开式可以写为

$$F(\lambda, \varphi, t) = \bar{F}(\lambda, \varphi, t) + \sum_{m=1}^{\infty} F^m(\varphi, t) \exp[Im_1(\lambda - \lambda_1)] \quad (22)$$

其中

$$m_1 = 2\pi m / (\lambda_2 - \lambda_1) = lm, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\bar{F}(\lambda, \varphi, t) = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \Delta_\lambda F$$

$$\Delta_\lambda F = F(\lambda_2, \varphi, t) - F(\lambda_1, \varphi, t)$$

$$F^m(\varphi, t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (F - \bar{F}) \exp[-Im_1(\lambda - \lambda_1)] d\lambda$$

因为在极地, $\bar{F} \equiv 0$, $F = F'$, 又因 F 不随 λ 而变, 除 $m = 0$ 的情形外, 按(22)式, F^m 必须恒等于零。根据特殊函数理论, 这时, 只要 F^m 在两极间连续, 总可以有

$$F^m(\varphi, t) = \sum_{n \geq |m|} F_n^m(t) P_n^m(\mu) \quad (23)$$

其中 $P_n^m(\mu)$ 是标准化的连属 Legendre 多项式, $\mu = \sin \varphi$ 。

在 $m = 0$ 时, 如 F^0 在两极间连续, 还有

$$F^0(\varphi, t) = \sum_{n \geq 0} F_n(t) P_n(\mu) \quad (24)$$

易见, $\Delta_\lambda F$ 也可以表示为如上的形式。

于是, 在区域 R_0 内, F 可以展开为*

$$F(\lambda, \varphi, t) = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{n=0}^N (\Delta_\lambda F)_n P_n(\mu) + \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N F_n^m \exp[Im_1(\lambda - \lambda_1)] P_n^m(\mu) \quad (25)$$

其中 M, N 各是 m 和 n 的最大值。如取 $M = N$, 则为三角截断。

$(\Delta_\lambda F)_n$ 和 F_n 的表达式各是

$$(\Delta_\lambda F)_n = \int_{-1}^1 \Delta_\lambda F P_n(\mu) d\mu \quad (26)$$

* (25)式中 F 的谱系数和 Legendre 多项式的上标用 m_1 而不用 m , 这是由于该多项式是方程 $\frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial y}{\partial \mu} + [n(n+1) - m_1^2 / (1 - \mu^2)] y = 0$ 的解的缘故。

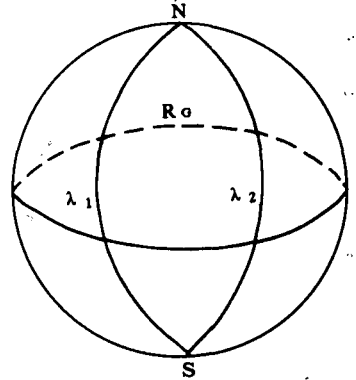


图 3 球面上的有限区域 R_0

$$F_{n_1}^m = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{-1}^1 (F - \bar{F}) \exp[-Im_1(\lambda - \lambda_1)] P_{n_1}^m(\mu) d\lambda d\mu \quad (27)$$

从(25)式可以看出:其右端第2项和一般的球谐函数十分相似,只是球谐系数 F_n^m 的定义稍有不同。但是,该式右端第1项是一般球谐函数所没有的。这是由于 F 在 R_0 内的非周期成分;也可以说是其边值的影响造成的。

2. 气象要素对赤道对称和气象要素对赤道反对称的情形

如作一定假设,(26)和(27)式还可以进行简化。

比如,在 F 对赤道对称的情形, \bar{F} 和 $F - \bar{F}$ 也必对赤道对称。这时,(26)和(27)式化简为

$$(\Delta_\lambda F)_n = \begin{cases} 2 \int_0^1 (\Delta_\lambda F) P_n d\mu & n = \text{偶数} \\ 0 & n = \text{奇数} \end{cases} \quad (28)$$

$$F_{n_1}^m = \begin{cases} \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_0^1 (F - \bar{F}) \exp[-Im_1(\lambda - \lambda_1)] P_{n_1}^m d\lambda d\mu & n - m_1 = \text{偶数} \\ 0, & n - m_1 = \text{奇数} \end{cases} \quad (29)$$

在 F 对赤道反对称的情形, \bar{F} 和 $F - \bar{F}$ 也必对赤道反对称。这时,(26)和(27)式化简为

$$(\Delta_\lambda F)_n = \begin{cases} 0 & n = \text{偶数} \\ 2 \int_0^1 (\Delta_\lambda F) P_n d\mu & n = \text{奇数} \end{cases} \quad (30)$$

$$F_{n_1}^m = \begin{cases} 0 & n - m_1 = \text{偶数} \\ \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_0^1 (F - \bar{F}) \exp[-Im_1(\lambda - \lambda_1)] P_{n_1}^m d\lambda d\mu & n - m_1 = \text{奇数} \end{cases} \quad (31)$$

3. Helmholtz 方程的解

设在 R_0 中,Helmholtz 方程的形式仍如(14)所示。但 u, G, g 和 ∇^2 则为用球面坐标表示的函数或算符;而解方程的边界条件则取作同一方程在全球或半球范围的解在 R_0 的边界上的值。

因为这时

$$\nabla^2 = \frac{1}{a_1^2} \nabla_1^2$$

其中 a_1 是地球半径,

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \lambda^2},$$

利用 P_n 和 P_n^m 的定义和 $m_1 = lm$ 的关系,显然,

$$\nabla_1^2 P_n = -n(n+1)P_n \quad (32)$$

$$\nabla_1^2 \{e^{m_1(\lambda-\lambda_1)} P_n^{m_1}\} = -n(n+1)e^{m_1(\lambda-\lambda_1)} P_n^{m_1}, \quad (33)$$

于是,如 u, G 的展开式可以表示为

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{G}\right) &= \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{n=0}^N (\Delta_\lambda \left(\frac{u}{G}\right))_n P_n(\mu) \\ &+ \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m_1|}^N \left(\frac{u}{G}\right)_n^{m_1} \exp[Im(\lambda - \lambda_1)] P_n^{m_1}(\mu), \end{aligned} \quad (34)$$

则有解

$$\begin{aligned} u_n &= -\frac{1}{2} [(\Delta_\lambda u)_n + \frac{a_1^2}{n(n+1) + b^2} (\Delta_\lambda G)_n] \\ &- \frac{a_1^2}{n(n+1) + b^2} G_n, \quad (m_1 = 0, b^2 = a_1^2 a^2) \end{aligned} \quad (35)$$

$$u_n^{m_1} = -\frac{a_1^2}{n(n+1) + b^2} G_n^{m_1} \quad (m_1 \neq 0) \quad (36)$$

把(34)和在全球面情况的解相比,它多了由 u 和 G 的边界值构成的项。从此,我们也可以看出,边界值对解所起的作用。

致谢:本文完成后,王宗皓同志曾仔细校阅,谨表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Tatsumi, A spectral limited-area model with time-dependent lateral boundary conditions and its application to a multi-level primitive equation model, *J. Meteor. Soc., Japan*, **64**, 637—663, 1986.
- [2] Liao Dongxian, A spectral nested regional shallow water equation model, *Adv. Atmo. Sci.*, **6**, 393—402, 1989.
- [3] 王竹溪, 郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社, 235—260, 1965年。

TWO METHODS OF EXPANDING A SCALAR METEOROLOGICAL ELEMENT IN A LIMITED—AREA

Liao Dongxian

(National Meteorological Center, SMA)

Abstract

Two methods of expanding a scalar meteorological element in a limited-area were proposed. One is applicable to the rectangular coordinates, and the other to the spherical coordinates. Also, the problem how to solve the Helmholtz equation in the two coordinates with the methods was discussed.