

利用多处理机积分全球谱模式的方法

廖洞贤

(国家气象局国家气象中心)

提 要

利用垂直正规模,把全球多层原始方程组化成多个浅水波型方程,从而在一个时间步长内,可以使积分的绝大部分工作在多处理机上进行。最后,还给出了计算的流程图。

一、引 言

近二十年来,由于并行/流水线处理器的出现,计算数学发生了巨大的变化,提出了很多新的算法,如同步并行算法,异步并行算法等等。它们对提高计算机的效率作出了贡献。

在我国,对气象问题的并行计算研究开始于1981年。从那时起的几年中,王宗皓(1981,1982)^{[1],[2]}考虑在某些方面大气是可分的,而在某些方面又是不可分的情况下,作了算法的理论研究。1988年,他的学生蒋波在IBM-4381-P03双处理机上,完成了浅水波方程的数值试验^[3]。虽然,这些工作并不多,但它们对今后我国气象问题并行计算的研究和发展是有益的。

在下面的各节中,我们将提出一个在垂直正规模的基础上,把全球多层原始方程谱模式化成多个浅水波型方程谱模式,在多处理机上进行计算的方案。

二、一个全球多层原始方程谱模式

1. 大气的垂直分层和垂直边界条件

在垂直方向,定义 σ -坐标为

$$\sigma = \frac{p}{p_s} \quad (1)$$

其中 p 是气压, p_s 是地面气压。

把大气分为 K 层(图 1), 在每个整数面上预报变量是 T, ϕ, u, v , 在每个半整数面上, 预报变量是 $\dot{\sigma}$ 。这里所用符号都是气象上常用的, 以后亦然。

各气层厚度可随 k 而变, $\Delta\sigma_k = \sigma_{k+1/2} - \sigma_{k-1/2}$, 但

$$\sum_{k=1}^K \Delta\sigma_k = 1 \tag{2}$$

总成立。

在 $\sigma = 1$ 和 0 处, 采用齐次边界条件

$$\dot{\sigma} = 0 \tag{3}$$

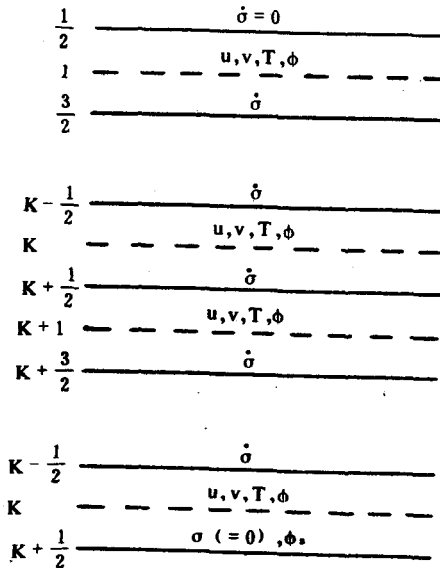


图 1 大气的垂直分层和预报变量的配置

2. 动力和热力学方程

在球面坐标中, 沿垂直方向离散的大气动力和热力学方程可以写成如下形式:

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (N_v)_k - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (N_w)_k \tag{4}$$

$$\frac{\partial \delta_k}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (N_w)_k + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (N_v)_k - \nabla^2 (E_k + G_k) \tag{5}$$

$$\frac{\partial T'_k}{\partial t} = -\frac{RT}{c_p} \left(\sigma \frac{\partial \dot{\sigma}_L}{\partial \sigma} + \delta \right)_k - (\dot{\sigma}_L \frac{\partial T}{\partial \sigma_k}) + (N_T)_k \tag{6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\sum_{j=1}^K \delta_j \Delta\sigma_j + \sum_{j=1}^K A_j \Delta\sigma_j \tag{7}$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \ln \sigma} = -RT_k \tag{8}$$

可见, 如把加热和耗散作为 N_T 和 N_w 等的一部份, 方程的形式仍然不变。这里 ζ 是垂直方

向的绝对涡度, $\delta = \nabla \cdot \vec{V}$, \vec{V} 是水平风速, $T = \bar{T} + T'$, $\bar{T} = \bar{T}(\sigma)$, $G = \phi + R\bar{T}H$, $H = \ln(p_s/p_0)$, p_0 是海平面标准气压, $E = (U^2 + V^2)/2(1 - \mu^2)$, $U = u\cos\varphi$, $V = v\cos\varphi$, $\mu = \sin\varphi$, φ 是纬度, λ 是经度。

$$A = -\vec{V} \cdot \nabla H,$$

$$N_s = \zeta V - \dot{\sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma} - R \frac{T'}{a} \frac{\partial H}{\partial \lambda},$$

$$N_v = -\zeta U - \dot{\sigma} \frac{\partial V}{\partial \sigma} - R \frac{T'}{a} (1 - \mu^2) \frac{\partial H}{\partial \mu},$$

$$N_T = \left[-\frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (T'U) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (T'V) \right] + N_{T1},$$

$$N_{T1} = \delta T' - \dot{\sigma} \frac{\partial T'}{\partial \sigma} - \dot{\sigma}_N \frac{\partial \bar{T}}{\partial \sigma} + \frac{R\bar{T}}{c_p} \left(-\sigma \frac{\partial \dot{\sigma}_N}{\partial \sigma} \right) + \frac{RT'}{c_p} \left(-\sigma \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} - \delta \right),$$

$$\dot{\sigma}_{k+1/2} = (\dot{\sigma}_L)_{k+1/2} + (\dot{\sigma})_{k+1/2},$$

$$(\dot{\sigma}_L)_{k+1/2} = \sigma_{k+1/2} \sum_{j=1}^k \delta_j \Delta \sigma_j - \sum_{j=1}^k \delta_j \Delta \sigma_j,$$

$$(\dot{\sigma}_N)_{k+1/2} = -\sigma_{k+1/2} \sum_{j=1}^k A_j \Delta \sigma_j + \sum_{j=1}^k A_j \Delta \sigma_j$$

静力方程的离散形式采用^[4]

$$\phi_k = \phi_s + \sum_{l=k}^K B_{kl} T_l \quad (9)$$

其中 ϕ_s 是地面位势高度, B_{kl} 是只与 $R, \ln(\sigma_{k+1/2}/\sigma_{k-1/2}), \ln(\sigma_{l+1/2}/\sigma_{l-1/2}), \sigma_1$ 和 0 有关的系数, R 是气体常数。

3. 谱方程

令 F 代表 $\zeta, \delta, T', H, \phi, U, V, A, E, G$ 或 ϕ_s , 并令

$$F = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N F_n^m e^{im\lambda} P_n^m$$

则方程(4)–(8)的谱形式分别是

$$\frac{\partial \zeta_n^m}{\partial t} = Z_n^m \quad (10)$$

$$\frac{\partial \delta_n^m}{\partial t} = D_n^m + \frac{n(n+1)}{a^2} (G_n^m + E_n^m) \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_n^m}{\partial t} = -L\delta_n^m + (N_T)_n^m \quad (12)$$

$$\frac{\partial H_n^m}{\partial t} = -\Delta^T \delta_n^m + \Delta^T A_n^m \quad (13)$$

和

$$\phi_n^m = \phi_s, n + BT_n^m \quad (14)$$

其中 $F_n^m = [F_n^m(1), F_n^m(2), \dots, F_n^m(K)]^T$, $\Delta^T = (\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_K)$, L 是以 L_{kl} 为元素构成的矩阵, $L_{kl} = R\bar{T}_{kl}/c_p$,

$$l_{kl} = \begin{cases} \frac{\Delta\sigma_l}{2\Delta\sigma_k} [\sigma_{k+1/2}(\bar{T}_{k-1} + \bar{T}_k) + \sigma_{k-1/2}(\bar{T}_k - \bar{T}_{k-1})] \frac{c_p}{RT}, & l > k \\ 1 - \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1/2}} + \frac{1}{2} [(\sigma_{k+1/2} - 1)(\bar{T}_{k+1} - \bar{T}_k) \\ + \sigma_{k-1/2}(\bar{T}_k - \bar{T}_{k-1})] \frac{c_p}{RT}, & l = k \\ \sigma_k \frac{\Delta\sigma_l}{\Delta\sigma_k} \left\{ \frac{1}{\sigma_{k-1/2}} - \frac{1}{\sigma_{k+1/2}} + \frac{1}{2\sigma_k} [(\sigma_{k+1/2} - 1)(\bar{T}_{k+1} - \bar{T}_k) \right. \\ \left. + (\sigma_{k-1/2} - 1)(\bar{T}_k - \bar{T}_{k-1}) \right\} \frac{c_p}{RT}, & l \leq k-1 \end{cases}$$

$$Z_n^m = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{im}{a(1-\mu^2)} (N_v)^m P_n^m(\mu) + \frac{(N_v)^m}{a} \frac{d}{d\mu} P_n^m(\mu) \right\} d\mu,$$

$$D_n^m = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{im}{a(1-\mu^2)} (N_u)^m P_n^m(\mu) - \frac{(N_u)^m}{a} \frac{d}{d\mu} P_n^m(\mu) \right\} d\mu,$$

$$N_{T, n}^m = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{-im}{a(1-\mu^2)} (T'U)^m P_n^m(\mu) + \frac{(T'V)^m}{a} \frac{d}{d\mu} P_n^m(\mu) \right\} d\mu + (N_{T1})_n^m,$$

P_n^m 是标准化的联属 Legendre 多项式, $(N_u)^m$ 和 $(N_v)^m$ 各是 N_u 和 N_v 的 Fourier 系数, B 是以 B_{kl} 为元素的矩阵, T_n^m 是 T' 的球谐系数。

还有, 在所有包含垂直平流的量或项中都应用了如下的近似:

$$\left(\dot{\sigma} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)_k \approx \frac{1}{2\Delta\sigma_k} [\dot{\sigma}_{k+1/2}(F_{k+1} - F_k) + \dot{\sigma}_{k-1/2}(F_k - F_{k-1})] \quad (15)$$

三、浅水波型方程组

1. 化动力热力学方程组为浅水波型方程组的必要性

方程(10)一(14)可以直接进行时间积分, 但由于方程在垂直方向和水平方向的耦合, 要充分发挥多处理机的功能比较困难。如果分成几个区域进行计算, 则每步都要进行数据交换, 增加了 CPU 时间。另外, 如果我们要取比一般显式格式为大的时间步长, 通常最简单的办法是采用半隐式格式, 从而, 就必须要解一个 3 维的 Helmholtz 方程。由于方程右端项的计算, 以及在求解过程中上下各层的某些不可分割性, 一般, 除非通过其他途径, 求解只能在一个处理器上进行。这就使其他的处理器处于等待的状态, 使计算机的潜力不能充分发挥。因此, 这类方法必须修改。化方程(10)一(14)为浅水波型方程组是达到这一目的的一个方法。

2. 浅水波型方程组

我们知道, 利用垂直正规模, 多层原始方程模式可以化为多个浅水波型方程组, 而浅水波型方程是 2 维的。因此, 这种方法适于在多处理机上应用。

考虑这种方法在数值天气预报中应用得很广, 下面我们略去推导, 只把用这种方法求得的浅水波型方程组写出, 即

$$\frac{\partial \bar{\zeta}_n^m}{\partial t} = \bar{Z}_n^m \quad (16)$$

$$\frac{\partial \bar{\delta}_n^m}{\partial t} = \bar{X}_n^m \quad (17)$$

和

$$\frac{\partial \bar{G}_n^m}{\partial t} = -\Lambda \bar{g}_n^m + N \bar{G}_n^m \quad (18)$$

其中 $\bar{F}_n^m = W^{-1} F_n^m$;

$W = (W_1, W_2, \dots, W_k)$, W_k 等是对应于矩阵 $C (= BL + R\bar{T}A^T)$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ (从大到小排列) 的特征向量;

$$G_n^m = \phi_n^m + R\bar{T}H_n^m; N_G, n^m = BN_T, n^m + R\bar{T}A^T A_n^m; A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k);$$

$$\bar{X}_n^m = W^{-1} [D_n^m + \frac{n(n+1)}{a^2} (G_n^m + E_n^m)].$$

方程(16)–(18)即是以不同特征值为特征的浅水波型方程。可以看出, 对于某一个 $\lambda_l (l = 1, 2, \dots, K)$ 来说, 其对应方程组和与其他特征值对应的方程组, 在不考虑非线性作用的情况, 可以认为是无关的, 或在一个步长内认为是无关的。

至于 H_n^m 和 T_n^m , 我们有

$$\frac{\partial H_n^m}{\partial t} = -\Lambda^T (W \bar{\delta}_n^m - A_n^m) \quad (19)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_n^m}{\partial t} &= -LW \bar{\delta}_n^m - N_T, n^m \\ &= B^{-1} (W \frac{\partial \bar{G}_n^m}{\partial t} - R\bar{T} \frac{\partial H_n^m}{\partial t}) \end{aligned} \quad (20)$$

四、时间积分

根据许多作者的计算 (Kasahara, 1976, Temperton 等, 1981)^{[5], [6]}, 除最初少数几个特征深度 (即 λ_l/g) 外, 其他特征深度的量级都远比均匀大气高度为小, 其相应的特征速度只和一般风速相当。因此, 我们可以采用类似于 Burridge 提出的积分方法 (1975)^[7], 即对方程 (16) 用显式, 而对方程 (17), (18) 当 $l > l^*$ 时用显式, 当 $l \leq l^*$ 时用半稳式, 其中 l^* 是一个小的正整数。为了方便, 这两种格式所用的时间步长不妨都取成一样。

对于某一垂直正规模, 方程(16)–(18)的显式和半稳式格式各表示如下。

1. 显式格式

$$\Delta_t \bar{\zeta}_n^m(l) = 2(\bar{Z}_n^m(l))^* \Delta t, \quad (21)$$

$$\Delta_t \bar{\delta}_n^m(l) = 2(\bar{X}_n^m(l))^* \Delta t, \quad (22)$$

$$\Delta_t \bar{G}_n^m(l) = -2\lambda_l (\bar{\delta}_n^m(l))^r \Delta t + 2(\bar{N}_{\sigma, n}^m(l))^r \Delta t, \quad (23)$$

$$\Delta_t H_n^m = -\Delta^r (W \bar{\delta}_n^m - A_n^m)^r \cdot 2\Delta t, \quad (24)$$

和

$$\Delta_t T_n^m(k) = \mathbf{B}^{-1} [W \Delta_t \bar{G}_n^m - R \bar{T} \Delta_t H_n^m]_k, \quad (25)$$

其中 $\Delta_t(\) = (\)^{r+1} - (\)^{r-1}$ 。

2. 半稳式格式

$$\Delta_t \bar{z}_n^m(l) = 2(\bar{Z}_n^m(l))^r \Delta t, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} [1 + \frac{n(n+1)}{a^2} \lambda_l \Delta t^2] (\bar{\delta}_n^m(l))^{r+1} &= \frac{2n(n+1)}{a^2} \Delta t [(\bar{G}_n^m(l))^{r-1} + (\bar{E}_n^m(l))^r] + 2(\bar{N}_{\sigma, n}^m(l))^r \Delta t \\ &+ [1 - \frac{n(n+1)}{a^2} \lambda_l \Delta t^2] (\bar{\delta}_n^m(l))^{r-1} + 2(\bar{X}_n^m(l))^r \Delta t, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Delta_t \bar{G}_n^m(l) = -2\lambda_l \Delta t \bar{\delta}_n^m(l)^r + 2\Delta t (\bar{N}_{\sigma, n}^m(l))^r, \quad (28)$$

$$\Delta_t H_n^m = -2\Delta^r [W \bar{\delta}_n^m - (A_n^m)^r] \Delta t, \quad (29)$$

和

$$\Delta_t T_n^m(k) = \mathbf{B}^{-1} [W \Delta_t \bar{G}_n^m - R \bar{T} \Delta_t H_n^m]_k. \quad (30)$$

其中 $\overline{(\)}^r = [(\)^{r+1} + (\)^{r-1}] / 2$ 。

五、并行计算

我们知道,谱模式不同于差分模式,在预报变量和有关变量的计算中,可以沿任一纬圈计算,而不牵涉其它的纬圈。为此,我们可以作如下约定:

1. 在网格点空间中的所有预报变量和有关的量都以沿纬圈的垂直剖面形式逐排存放在存储器中。

2. 在谱空间中的所有预报变量和有关的量都以水平面的形式逐层存放在存储器中。

设 K 是偶数,则我们可以把大气分为大气上部和大气下部两部分,各包含相同数量的 σ -面。

于是,在每个时间步长中,在有二个处理器 P_1 和 P_2 时,有 4 种情况需要分别考虑。

(1) 在网格点空间

P_1 : 逐排在北半球(包括赤道)范围内计算。

P_2 : 逐排在南半球范围内计算。

(2) 在谱空间

在不作变换或反变换时,可以按

P_1 : 逐层计算大气上部(或 l 前半的范围)

P_2 : 逐层计算大气下部(或 l 后半的范围)

(3) 从谱空间到网格点空间

要计算的主要是非线性项,不能逐层进行。这时,可采用如下方式:

P_1 : 对于某个变量,或其微商来说,先逐排计算北半球(包括赤道)范围内变量的对称部分,再计算同范围内的反对称部分,再相加。

P_2 : 对于某个变量,或其微商来说,先逐排计算南半球范围内变量的反对称部分,再计算同范围内的对称部分,再相加。

(4)从网格点空间到谱空间

这时,主要是作 FFT 和 Gauss 积分。对于前者与在网格点空间的情形一样,对于后者,与在谱空间的情形一样。

在时间积分过程中,如在 τ 时刻, $\bar{\zeta}_n^*(l), \bar{\delta}_n^*(l), \bar{G}_n^*(l), T_n^*(k)$ 和 H_n^* 已知,我们可以根据下面的步骤对显式格式和半隐式格式进行计算。

①从 $\bar{\zeta}_n^*(l), \bar{\delta}_n^*(l), \bar{G}_n^*(l)$, 通过反变换求出 $\zeta_n^*(k), \delta_n^*(k), G_n^*(k)$, 再结合 $T_n^*(k)$ 和 H_n^* 求出在网格点上的 $N_n(k), N_s(k), N_T(k), A(k), E(k)$ 等。

②求 $[Z_n^*(k)]^r, [D_n^*(k)]^r$ 和 $[N_T, n^*(k)]^r$ 等,再通过变换求出 $[\bar{Z}_n^*(l)]^r, [\bar{X}_n^*(l)]^r$ 和 $[\bar{N}_{G, n^*}(l)]^r$ 。

③利用方程(21)—(25)或(26)—(30)作一个时间步长积分,求出 $\tau+1$ 时刻的 $\bar{\zeta}_n^*(l), \bar{\delta}_n^*(l), \bar{G}_n^*(l), T_n^*(k)$ 和 H_n^* 。

这些步骤可以用下图表示为:

$$\begin{aligned} & [\bar{\zeta}_n^*(l)]^r \text{ 等 } \xrightarrow{W} [\zeta_n^*(k)]^r \text{ 等 } \rightarrow [N_n(k)]^r \text{ 等} \\ & \xrightarrow{\text{Gauss 积分}} [Z_n^*(k)]^r \text{ 等 } \xrightarrow{W^{-1}} [\bar{Z}_n^*(l)]^r \text{ 等} \\ & \longrightarrow [\bar{\zeta}_n^*(l)]^{r+1} \text{ 等 } \xrightarrow{W} [T_n^*(k)]^{r+1} \text{ 等} \end{aligned}$$

也可以采用如下方式:

$$\begin{aligned} & [\bar{\zeta}_n^*(l)]^r \text{ 等 } \xrightarrow{W} [\zeta_n^*(k)]^r \text{ 等 } \rightarrow [N_n(k)]^r \text{ 等} \\ & \xrightarrow{W^{-1}} [\bar{N}_{n, n^*}(l)]^r \text{ 等 } \xrightarrow{\text{Gauss 积分}} [\bar{Z}_n^*(l)]^r \text{ 等} \\ & \longrightarrow [\bar{\zeta}_n^*(l)]^{r+1} \text{ 等 } \xrightarrow{W} [T_n^*(k)]^{r+1} \text{ 等} \end{aligned}$$

容易看出上面两种步骤中任意一种都可以得到同样的结果。不过,在这两种步骤中都要作两个变换:一个正变换,一个逆变换。这时,虽然都是由谱空间到谱空间,但每作一次变换都要牵涉到垂直方向各层(或不同 l)的谱系数,因而,不能逐层进行。不过,我们可以仿照在谱空间采用过的办法,按下列方式进行。

P_1 : 先就 l (或 k) 的前半(或上半)逐 l (或 k) 作对称谱系数的变换,再作反对称谱系数的变换,

P_2 : 先就 l (或 k) 的后半(或下半)逐 l (或 k) 作反对称谱系数的变换,再作对称谱系数的变换。

六、讨 论

上面只讨论了两个处理器的情况。如果处理器更多,原则上上面的方法仍然可以应用,只是处理器工作的分配更细罢了。例如,如这时每个 σ -面的排数是 J ,处理器为 S 个,

而 $S \ll J, K$ 且 $J/S, K/S$ 为整数, 则前节 4 种情形可以改写为:

1. 在网格点空间

各处理机各计算 J/S 排, 各不相同。

2. 在谱空间

在不作变换或反变换时, 各处理器各计算 K/S 层, 各不相同。

3. 从谱空间到网格点空间

各处理器逐排计算各不相同的 J/S 排的网格点值。因这时对不同排的某层的网格点来说, 计算中要用到同层 σ -面的所有谱系数, 这会使各处理器读取数据发生资源冲突。为了避免这种现象, 我们可以把各 σ -面的谱系数按一定方式各组成一个数组存放, 其第一, $n^*, 2n^*, \dots, Sn^*$ ($1 < n^* < N^*/S, N^*$ 是各数组谱系数的总数) 个数各是 N_0, N_1, \dots, N_s , 最后是 N_r , 则计算时各处理器各依次从 N_0, N_1, \dots, N_s 开始, 按图 2 方向读数, 直到该数组读完为止。

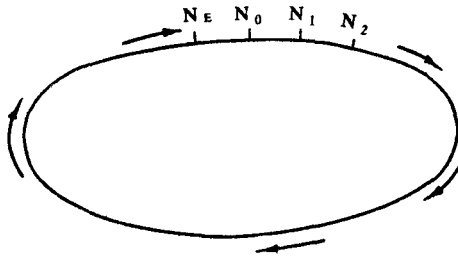


图 2 多处理器循环读数方式

4. 从网格点空间到谱空间

从网格点空间到谱空间和谱空间的情形一样。至于两个变换中的计算, 其所牵涉到的读数均可按图 2 方式进行。

致谢: 在本文完成时, 王宗皓同志曾提出宝贵意见, 谨在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] 王宗皓, 天气分析预报系统工程的理论模式, 中期数值天气预报论文集, 气象出版社, 111—122, 1981年。
- [2] 王宗皓等, 气象组装模式的编辑程序, 科学探索, 2, 1—14, 1982。
- [3] 蒋波, IBM4381 双 CPU 机并行处理功能开发利用, 国家气象局卫星气象中心硕士论文, 1988年。
- [4] Baede, A. P. M. et al, Adiabatic formulation and organization of ECMWF's spectral model, Tech. Report, 15, 1979。
- [5] Kasabara, A., Normal modes of Ultralong waves in the atmosphere, *Mon. Wea. Rev.* 104, 669—690, 1976。
- [6] Temperton, C. and Williamson, D. L., Normal mode initialization for a multilevel grid-point model, Part I, linear aspects, *Mon. Wea. Rev.*, 109, 729—743, 1981。
- [7] Burridge, D. M., A split semi-implicit reformulation of the Bushby-Timpson 10-level model, *Q. J. R. M. S.*, 101, 777—792, 1975。
- [8] Liao Dongxian and Huangfu Xueguan, Report of application of the parallel algorithm in NWP at SMA, The dawn of massively parallel processing in meteorology, 175—187 Springer-Verlag, 1990。

**STRATEGIES ON USE OF MULTIPLE PROCESSORS IN TIME
INTEGRATION FOR GLOBAL MULTILEVEL
PRIMITIVE EQUATION MODEL**

Liao Dongxian

(National Meteorological Center, SMA)

Abstract

A global multilevel spectral primitive equation model has been reduced to several sets of shallow water type equations by means of vertical normal modes. Then, most part of computational amount can be simultaneously performed by multiple processors in a time step. Finally, a flow graph is shown.