

大气中水滴降速的计算

尹 球 许绍祖
(南京大学大气科学系)

提 要

本文从理论上推导了流体介质中球体降速 v 随其半径 r 的变化形式 $v = a \frac{b}{a} \frac{1}{r} \left\{ \sqrt{1 + \beta \frac{a}{b^2} r^3} - 1 \right\}$ 。其中, a, b 为简化运动方程时引进的二个待定常数, 由大气中水滴降速的实测资料确定, 其值为 $a = 0.53563, b = 1.37358$ 。由此式计算的最大相对误差为 24%。比较了这一半理论公式与他人经验公式各自的特点。推荐了三组形如 $v = A \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right) \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^{\frac{\alpha+1}{3}} r^{\beta}$ 之新的统计公式, 它们分别将 $r = 0 \sim 2900 \mu\text{m}$ 分为三、四、五段, 对应的计算最大相对误差分别为 11%、7%、4%。

一、引 言

云滴、雨滴及球状冰雹等在大气中的沉降终速度计算公式有理论及经验二种。从小球绕流运动方程出发, 完全忽略惯性项得到了著名的 Stokes 终速公式 $v = k_s r^2$ 。其中 r 为球体半径; k_s 取决于球体密度 ρ_s 、介质密度 ρ 、动力粘滞系数 ν 、重力加速度 g 等状态参数。它只适用于 $Re = 2vr/\nu \ll 1$ 情形。空气中水滴沉降速度的 Stokes 公式计算值与实测值的误差在 $r = 25 \mu\text{m}$ 和 $50 \mu\text{m}$ 时分别约为 10% 及 24%。水滴愈大, 误差也愈大。

为较精确地计算整个滴谱范围内球体的降速, 人们常放弃理论计算, 而由实测降速资料作各种统计回归。不同的半径范围, 回归公式亦不同。这方面的工作有: Beard(1976)^[1]、Wobus(1971)^[2]、Сулаквелидзе(1965)^[3]、Auer(1972)^[4]等。

本文试图采用理论分析与统计回归有机结合的办法给出一个普适的球体降速公式, 以便协调降速公式的计算精度及物理基础。本文还就如何由实测降速资料获得简单、高精度的经验降速公式作了探讨。

二、理论分析

若将参照系固定在球体中心, 则球体在流体介质中以终速 v 沉降产生的介质扰动(对液滴, 其内部亦发生扰动)变成了速度为 v 的来流绕静止球体的定常流动。

设介质为不可压粘性流体, 则运动方程、连续方程分别为:

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

其中 \vec{u} 表示绕流速度; 运动方程中的气压梯度力项 $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ (p 为气压) 及重力项 $-g\hat{z}$ (z 为高度, \hat{z} 为单位铅直向量) 已合并成一项 $-\frac{1}{\rho} \nabla P$, $P = p + \rho gz$ 。

选择球坐标系 $(\vec{r}, \theta, \varphi)$ 。当 $\vec{r} \rightarrow \infty$ 时 \vec{u} 应趋于来流速度 \vec{v} ; 而在 $\vec{r} = r$ 处 \vec{u} 应满足连续性要求, 对固体球即为 $\vec{u} = 0$ 。若忽略伴随外部流场存在的液滴内部流场的影响, 则对液滴表面亦应有 $\vec{u} = 0$ 。总之, 我们取边值条件为:

$$\begin{cases} \vec{r} \rightarrow \infty, \vec{u} \rightarrow \vec{v} \\ \vec{r} = r, \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \vec{r} \rightarrow \infty, \vec{u} \rightarrow \vec{v} \\ \vec{r} = r, \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

直接求(1)~(4)精确解析解是很困难的。Stokes(1851)^[5]、Oseen(1910)^[6]、Chester 和 Breach(1969)^[7]、陈景尧(1975)^[8]等对(1)~(4)作不同的近似处理, 获得了各种关于介质对球体粘滞阻力 F 的公式。它们适用的 Re 范围都有限 ($Re < 6$), 而实际水滴及冰雹的 Re 可能非常大, 例如 $r = 500 \mu\text{m}$ 水滴的 Re 可达 267。

必须指出, 由阻力关系推求降速公式本身也非易事, 除非阻力关系的形式非常简单。为了获得这样的阻力关系, 希望它①适用于较大的 Re 数范围, 把雨滴、冰雹等也包括在内; ②形式很简单, 能以此导出降速公式, 我们对运动方程(1)作如下的近似简化处理:

方程(1)为非线性微分方程, 包含一个非线性项 $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ 。注意到边值条件(3)和(4)式, 我们将平流项 $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ 近似为 $(\frac{2}{9} a \vec{v} \cdot \nabla) \vec{u}$, 其中 a 是一待定常数 ($0 < a < \frac{9}{2}$)。为使运动方程左右二端能更好地保持平衡, 在对(1)式左端作近似后, 我们对(1)式右端也作一订正, 将粘性项 $\nu \nabla^2 \vec{u}$ 订正为 $b\nu \nabla^2 \vec{u}$, b 也是待定常数 ($b > 0$)。如此, 非线性运动方程便简化为线性运动方程:

$$\left(\frac{2}{9} a \vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + b\nu \nabla^2 \vec{u} \quad (1')$$

由于研究的是轴对称运动, 对称轴向为铅直向 \hat{z} , $\vec{v} = v\hat{z}$, 故(1')可进一步简写成:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\tau} \nabla P + \frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 \vec{u} \quad (1'')$$

其中, $\tau = \frac{2av\rho}{9}$; $\varepsilon = \frac{2av}{9bv}$ 。

若能找到以下二方程组的通解

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 \vec{u}_1 \\ \nabla \cdot \vec{u}_1 = 0 \end{cases} \quad (5a)$$

$$(5b)$$

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial z} = -\frac{1}{\tau} \nabla P \\ \nabla \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \quad (6a)$$

$$(6b)$$

$$\nabla^2 \vec{u}_2 = 0 \quad (6c)$$

则显然方程组(1'')、(2)的通解为

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad (7)$$

容易验证(I)、(II)二方程组的通解分别为:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla - \hat{z}\right)t & (8) \\ t \text{ 满足: } \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 t & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_2 = -\nabla \Phi, P = \tau \frac{\partial \Phi}{\partial z} & (10) \\ \Phi \text{ 满足: } \nabla^2 \Phi = 0 & (11) \end{cases}$$

总之,(1')与(2)的通解为

$$\begin{cases} \vec{u} = \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla - \hat{z}\right)t - \nabla \Phi & (12) \\ P = \tau \frac{\partial \Phi}{\partial z} & (13) \end{cases}$$

其中, t, Φ 满足(9)、(11)式。

利用边值条件(3)、(4)得:当 $\frac{a}{b} Re$ 充分小时, t, Φ 近似为:

$$t = t_0 \left\{ \frac{e^{\frac{t}{r}(z-r)}}}{r} \right\} + t_1 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{e^{\frac{t}{r}(z-r)}}}{r} \right\} \quad (14)$$

$$\Phi = -vz + \Phi_0 \left(\frac{1}{r} \right) + \Phi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (15)$$

其中, $t_0 = \frac{3vr}{2} \left(1 + \frac{a}{24b} Re \right), t_1 = \frac{a}{12b} vr^2 Re, \Phi_0 = \frac{27bvr^2}{2a} \frac{1}{Re} \left(1 + \frac{a}{24b} Re \right), \Phi_1 = \frac{1}{2} vr^2$ 。

球体下降受到介质的粘滞阻力:

$$F_v = \iint_{\sigma} (p_{rr} \cos \theta - p_{r\theta} \sin \theta) d\sigma - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g \quad (16)$$

其中, σ 指球体表面, $p_{rr}, p_{r\theta}$ 为应力分量,在流体不可压及球面无滑脱假设(2)、(4)下,球面上为

$$\begin{cases} p_{rr} = -p & (17) \\ p_{r\theta} = (v\rho) \frac{\partial}{\partial r} (\vec{u} \cdot \hat{\theta}) & (18) \end{cases}$$

利用运动方程组求解结果可以证明,当 b 充分靠近1时

$$F_v = 12\pi\rho b v^2 r^2 \left(\frac{1}{Re} + \frac{a}{24b} \right) \quad (19)$$

于是

$$C_D \equiv \frac{F_v}{\frac{\pi r^2}{2} \rho v^2} = \frac{24}{Re} \left(b + \frac{a}{24} Re \right) \quad (20)$$

C_D 称为阻力系数。 $r \rightarrow 0, C_D \rightarrow b \frac{24}{Re}; r \rightarrow \infty, C_D \rightarrow a$ 。

(20)式的形式非常简单,可以用它导出降速公式。具体地,因为是考虑沉降终速,所以球体受到的粘滞阻力 F_v 、浮力 $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g$ 应与重力 $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_s g$ 相平衡,即:

$$F_v = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_s - \rho) g \quad (21)$$

用(19)式代入并整理得关于降速的二次方程:

$$av^2 + \left(\frac{12vb}{r}\right)v - \frac{8}{3} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} gr = 0 \quad (22)$$

其合理根值为

$$v = a \frac{b}{a} \frac{1}{r} \left\{ \sqrt{1 + \beta \frac{a}{b^2} r^3} - 1 \right\} \quad (23)$$

其中,

$$a = 6v \quad (24)$$

$$\beta = \frac{2}{27} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{g}{v^2} \quad (25)$$

我们以和 1013hPa、20℃、饱和空气、水滴相对应的状态参数(ρ_s 、 ρ 、 v 、 g)值作为标准状态参数。众多的实验反映了这样的规律:当 r 很小时 v 正比于 r^2 ; 当 r 很大时,若仍保持球形,则 v 趋于与 \sqrt{r} 成正比。因此,人们常用 $v = k_r r^2$ 计算小水滴(一般指 $r < 50\mu\text{m}$)及其它小气溶胶粒子降速,而用 $v = \text{经验常数} \cdot \sqrt{r}$ 计算大雨滴尤其是球状冰雹的降速。

分析一下(23)式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{当 } r \rightarrow 0 \quad v \rightarrow \frac{a\beta}{2b} r^2 \end{array} \right. \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{当 } r \rightarrow \infty \quad v \rightarrow a \sqrt{\frac{\beta}{a}} \sqrt{r} \end{array} \right. \quad (27)$$

因此,从理论上实验规律是很自然的,并且理论还给出了状态参数对降速的影响。

可以证明: $\frac{d^2v}{dr^2}$ 正负转折点在

$$r = \sqrt[3]{\frac{10b^2}{9a} \cdot \frac{1}{\beta}} \quad (28)$$

在此半径附近大致地 v 正比于 r 。

至于理论公式(23)实际适用的球体半径范围决定于导出该公式时所作的近似假定。对于把雨滴、冰雹包括在内的较大 Re 数范围,我们不可能选择一组(a 、 b)使①运动方程(1)近似为(1'),② t 、 Φ 近似为(14)、(15)和③ F 近似为(19)的效果均达最佳。但从下文讨论将会看到:我们可以对三个近似效果加以权衡,选择一组(a 、 b)使三步近似的总结果(23)达到较好的效果。

三、常数 a 、 b 的确定

由(1')可见取 $a=0$ 及 $a=4.5$ 分别相当于完全忽略惯性项($\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ 及把惯性项近似为($\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u}$ 。图1是 $a=0$ 及 $a=4.5$ 时由(23)式算得的大气水滴降速值与实测值的比较(取 $b=1$,即不作粘性项 $v \nabla^2 \vec{u}$ 订正)。随半径的增大,计算误差将不断增大。取 $a=0$ 、 $b=1$ 使降速计算值比实测值偏大,即低估了粘滞阻力。取 $a=4.5$ 、 $b=1$ 则正好相反。

为尽可能让(23)式计算结果与实测数据相符合,我们希望利用实测资料给出最佳的

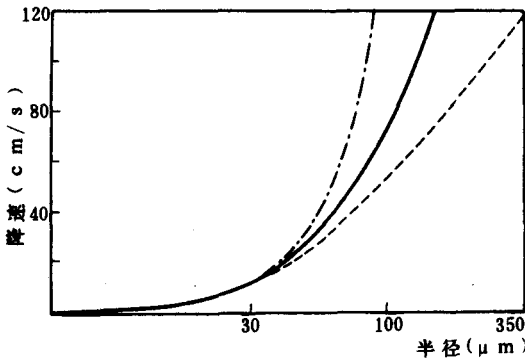


图 1 标准状态参数下取 $a=0, b=1$ 及 $a=4.5, b=1$ 时 (23)式算得的降速值与实测值的比较
(——实测; - · - $a=0, b=1$; ····· $a=4.5, b=1$)

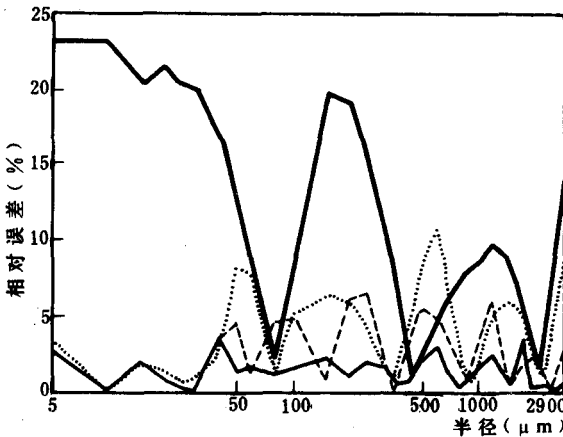


图 2 计算降速与实测降速的相对误差 $\left| \frac{v-\tilde{v}}{\tilde{v}} \right|$ 分布
(——取 $a=0.53563, b=1.37358$ 的(23)式; ·····, - · - ·
—分别对应于三段、四段、五段形如(32')的分段回归公式)

差仍可能很大,只是正负偏差基本相当而已。标准 1、2 及 3 的效果都不错,这就是说应取 $0.49 < a < 0.57, 1.19 < b < 1.57$ 。我们取 $a=0.53563, b=1.37358$,其对应的计算值与实测值相对误差分布见图 2。最大相对误差不超过 24%。按这组 a, b 数据,水滴阻力系数 $C_D = \frac{24}{Re} (1.37358 + \frac{0.53563}{24} Re)$,小水滴的降速计算值比 Stokes 公式小,前者为后者的 0.728 倍。

a, b 。本文实测资料一律取自 Mason (1971)^[9] 给出的 1013hPa、20℃ 饱和空气中的水滴降速资料。采用水滴降速资料的不足之处是:当 r 较大时水滴将变形不再维持球状,从而与公式(23)的要求不尽一致。

我们尝试了五种计算值 v 与实测值 \tilde{v} 的拟合标准,它们各自的要求及用最优化方法得到的相应 a, b 值列于表 1。表中同时给出了

$$\overline{\left| \frac{v-\tilde{v}}{\tilde{v}} \right|} = \frac{1}{r_{max}} \int_0^{r_{max}} \frac{v-\tilde{v}}{\tilde{v}} dr$$

$$\text{及 } \overline{\left| \frac{v-\tilde{v}}{\tilde{v}} \right|} = \frac{1}{r_{max}} \int_0^{r_{max}} \left| \frac{v-\tilde{v}}{\tilde{v}} \right| dr \text{ 的值。}$$

考察表 1 所列 $\overline{\left| \frac{v-\tilde{v}}{\tilde{v}} \right|}$ 、 $\overline{\left| \frac{v-\tilde{v}}{\tilde{v}} \right|}$ 数据及对不同大小水滴的绝对和相对计算误差分布(略)可以发现标准 4 及标准 5 不可取。事实上,要求 $\max \left| \frac{v-\tilde{v}}{\tilde{v}} \right|$ 达最小会受个别数据误差的严重影响;而要求 $\left| \int_0^{r_{max}} \frac{v-\tilde{v}}{\tilde{v}} dr \right|$ 达最小则

尽管得到的 $\overline{\left| \frac{v-\tilde{v}}{\tilde{v}} \right|}$ 很小,但各个半径上的正负相对偏差

表1 由实测降速资料确定的 a, b 值及相应的(23)式计算误差情况

序号	1	2	3	4	5
要求达最小的量	$\sum (v - \bar{v})^2$	$\sum \left(\frac{v - \bar{v}}{v} \right)^2$	$\int_0^{r_{max}} \left \frac{v - \bar{v}}{v} \right dr$	$max \left \frac{v - \bar{v}}{v} \right $	$\left \int_0^{r_{max}} \frac{v - \bar{v}}{v} dr \right $
a	0.53563	0.56265	0.49828	0.64806	0.72688
b	1.37358	1.19693	1.56082	1.28029	0.18687
$\left(\frac{v - \bar{v}}{v} \right) (\%)$	-1.01	-2.05	1.14	-8.71	0
$\left \frac{v - \bar{v}}{v} \right (\%)$	7.31	8.04	6.84	10.88	24.57

四、对比分析

图3给出了(23)式在 $r \rightarrow 0$ 及 $r \rightarrow \infty$ 时之极限公式(26)、(27)分别与 Stokes 理论公式及被广泛应用于对流云模式的 Kessler(1969)^[10]经验公式 $v = 1838.48 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \sqrt{r}$ 的对比情况。若允许最大相对误差在 20% 左右, 则 Stokes 公式可应用于 $r < 50 \mu\text{m}$ 水滴, 而(26)式适用于 $r < 100 \mu\text{m}$ 。在 $600 < r < 2300 \mu\text{m}$ 范围内(27)式优于 Kessler 公式, 在其它半径范围内则相反, 总的来说二者精度差别不大。

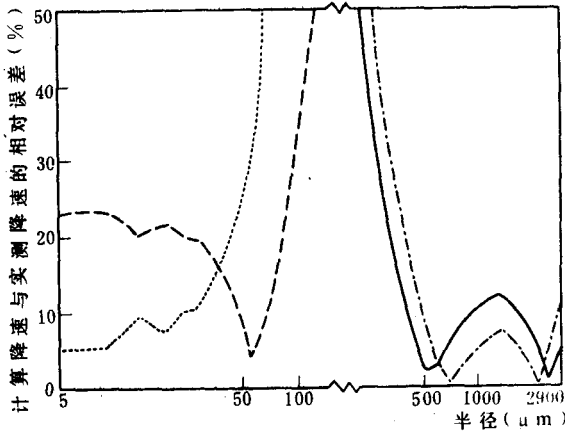


图3 公式(26)、(27)分别与 Stokes 公式和 Kessler 公式的比较
 (.....Stoker 公式; ----公式(26); —— Kessler 公式;
 - · - 公式(27))

我们选了 3 组水滴降速分段回归经验公式与降速公式(23)进行比较。

S 组公式取自 Сулаквелидзе (1965)^[3]。它将 $r = 0 \sim 2900 \mu\text{m}$ 分成三段, 各段降速分别正比于 r^2, r, \sqrt{r} 。该组公式比较简单且能适用于不同的状态参数值。W 组公式取自 Wobus(1971)^[2]的公式(3)。它将 r 分为四段, 各段降速表示成不同的 r 多项式。该组公式只适用于状态参数取标准值。B 组公式取自 Beard(1976)^[1]。它将 r 分为三段, 各段的多项式回归公式比较复杂。这组公式考虑了状态参数的影响。

标准状态参数下 S 组、W 组及 B 组公式的计算误差分布(略)和(23)式计算误差分布的对比可以发现: 就计算精度而言, 我们的半理论公式(最大相对计算误差 23.25%) 优于 S 组经验公式(62.8%), 但不及 W 组(10.02%) 及 B 组(8.19%) 经验公式。

五、关于降速随半径变化的新的经验公式

如果我们不关心降速随半径变化公式的理论基础,也不需要对整个滴谱范围运用统一的降速公式,那么问题将集中在探求适当的分段回归降速经验公式,要求它具有如下特征:精度较高、段数较少且允许状态参数取值改变。

当半径很小或很大时降速公式(23)可分别简化为半径的2次、1/2次幂函数。很自然地,对其它半径范围也可考虑用 r 的幂函数来近似(23)式。

考察(23)式,它可写成

$$v = \alpha \frac{b}{a} \frac{1}{r} Q(x) \quad (29)$$

$$Q(x) = \sqrt{1+x} - 1 \quad (30)$$

$$x = \beta \frac{a}{b^2} r^3 \quad (31)$$

将 v 近似为 r 的幂函数等价于将(30)式近似为 x 的幂函数:

$$Q(x) = mx^n \quad (30')$$

利用(30')及(31)即知(29)近似为

$$v = \alpha \frac{b}{a} \frac{m}{r} \left\{ \beta \frac{a}{b^2} r^3 \right\}^n \quad (32)$$

不失一般性,(32)可写成

$$v = A \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right) \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^{\frac{B+1}{3}} r^B \quad (32')$$

其中, α, β 如(24)、(25)式所定义; α_0, β_0 为 α, β 在标准状态参数下的值; A 的量纲为 $[L]^{1-B}[T]^{-1}$, B 是无量纲量,它们是与状态参数无关的常量。

总之,我们有理由尝试按(32')形式对降速作逐段回归, A, B 决定于所对应的半径范围。

仍然利用Mason(1971)^[9]水滴降速资料,对一定的分段数目,以(32')作逐段回归的计算精度与划分方法有关。对 $r = 0 \sim 2900 \mu\text{m}$ 作适当划分可使三段、四段及五段回归公式计算的最大相对误差降至最小,分别为11%、7%及4%。

表2给出了使计算精度达最高的划分方法、 A 和 B 应取的值及各段中的精度。由表可见, A, B 与所对应的半径范围相联系。以半径从小到大为序,段次越高, A, B 越小,这与(23)式反映的规律是一致的。

按第二节讨论, B 应满足 $\frac{1}{2} \leq B \leq 2$,这儿统计的结果是 $B \leq 2$,却未必 $> \frac{1}{2}$ 。其原因在于(23)式要求沉降物为球体,而对水滴而言,实际上,随半径的增大其迎面面将逐渐变平($r > 1000 \mu\text{m}$ 即有明显变形),导致了阻力的额外增加,对降速的增加起到了抑制作用,从而使 B 有可能 $< \frac{1}{2}$ 。简言之, $B < \frac{1}{2}$ 可能是水滴变形的结果。

表 2 用 $v=A\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^{\frac{p+1}{q}}r^B$ 作分段回归

划分段数	划分方法 (0~2900 μm)	A、B 取值		各段最大计算 相对误差(%)	最大计算相 对误差(%)
		A (按 CGS 制)	B		
3	$0 < r \leq 56$	0.8523666E6	0.1950680E1	8.1	11
	$56 < r \leq 562$	0.1420221E5	0.1162205E1	8.4	
	$562 < r \leq 2900$	0.1691079E4	0.4228832E0	10.9	
4	$0 < r \leq 46$	0.9047843E6	0.1959322E1	3.6	7
	$46 < r \leq 227$	0.3136089E5	0.1333816E1	6.2	
	$227 < r \leq 1200$	0.4264156E4	0.8064010E0	6.7	
	$1200 < r \leq 2900$	0.1251106E4	0.2293341E0	3.5	
5	$0 < r \leq 42$	0.9047843E6	0.1959322E1	3.6	4
	$42 < r \leq 116$	0.6449711E5	0.1475758E1	1.6	
	$116 < r \leq 552$	0.9314131E4	0.1041262E1	2.1	
	$552 < r \leq 1800$	0.2357829E4	0.5669010E0	3.7	
	$1800 < r \leq 2900$	0.1059112E4	0.1118189E0	0.9	

最后,我们分析一下所作三、四、五段回归公式的详细计算结果(图 2)。三段公式、四段公式计算精度分别与第四节中 B 组公式(三段)、W 组公式(四段)相近。新的经验公式优点在于计算很简单且能运用于不同的状态参数。此外,五段回归公式还具有精度更高(计算的最大相对误差不超过 4%)之特点。

需要指出,本文提出的逐段回归公式各段的计算结果能够互相衔接,而且将各段公式外推,当 $r \rightarrow 0$ 和 $r \rightarrow \infty$ 时都有 $V \rightarrow 0$ 和 $V \rightarrow \infty$ 。

由于资料缺乏,本文中计算结果与实例结果的比较都是对标准状态参数进行的,需要获得诸如:高空、球状冰雹、油介质等各种条件下可靠落速实验数据,以进一步检验所给出的公式。另一方面,在目前缺乏可靠实验资料情况下,可以用本文得到的公式来指导一般状态参数下降速的计算。

参 考 文 献

- [1] Beard, K. V., Terminal velocity and shape of cloud and precipitation drops aloft. *J. Atmos. Sci.*, **33**, p851, 1976.
- [2] Wobus, H. B. etc., Calculation of the terminal velocity of water drops. *J. Appl. Meteor.*, **10**, p751, 1971.
- [3] Сулаквелидзе Г. К., и. т. д., Образование осадков и воздействие на градовые процессы. Гидрометеорологическое Издательство, стр113, 1965.
- [4] Auer, A. H., Distribution of graupel and hail with size. *Month Weather Review*, **100**, 5, p325, 1972.
- [5] Stokes, G. G., On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **9**, pt. 2, p8, 1981.
- [6] Oseen, C. W., "Hydrodynamik" Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927.

- [7] Chester, W., and D. R., Breach. On the flow past a sphere at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **37**. p751, 1969.
- [8] 陈景尧, 论气泡、液滴和固体圆球在粘滞性流体中的运动, 中国科学, 第四期, 376, 1975 年。
- [9] Mason, H. J., 云物理学(中译本), 611, 科学出版社, 1978 年。
- [10] Kessler, E., On the distribution and continuity of water substance in atmospheric circulations. *Meteor. Monogr.* **10**, 23, p20, 1969.

A CALCULATION FORMULA OF THE TERMINAL VELOCITY OF WATER DROPS IN THE ATMOSPHERE

Yin Qiu Xu Shaozu

(Department of Atmospheric Science, Nanjing University)

Abstract

In this paper, for the terminal velocity v of a spheric water drop (with a radius r) falling in the fluid medium, an analytical solution $v = \alpha \frac{b}{a} \frac{1}{r} \left\{ \sqrt{1 + \beta \frac{a}{b^2} r^3} - 1 \right\}$ is theoretically derived. The constants a and b in the formula are determined by the experimental velocity data of water drops in the atmosphere: $a = 0.53563$, $b = 1.37358$ with a maximum relative calculating error of 24%. This semi-theoretical formula is compared with the other empirical formulas. Three new statistical formulas in the form of $v = A \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right) \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^{\frac{B+1}{3}} r^B$ are recommended. They divided r (0~2900 μ m) into 3, 4 and 5 ranges with a maximum relative error of 11%, 7% and 4%, respectively.