

Benard 热对流扰动不稳定激发的空间耗散结构解

吴 勇*

(四川涪陵地区气象局)

提 要

本文采用临界摄动方法,讨论了 Benard 热对流在系统失稳后,引入非线性强迫作用,形成稳定的空间耗散结构解的过程。结果表明,当参数取适当的数值时,垂直及水平速度、温度随高度的变化和在 $X-Z$ 剖面的流线分布与实验基本一致,且解具有超临界分叉的性质。

一、引 言

Benard 热对流是大气中常见的一种运动。它是因为上下界面热力差异超过某一临界值后,大气从静止状态(忽略基本气流)突然作整体运动所产生的宏观对流现象。从非平衡非线性热力学观点看,即是系统的均匀平衡态失稳后,在与外界不断交换物质和能量中,趋于新的稳定的空间或时间有序的耗散结构的过程;在这种远离平衡态的演化过程中,非线性的反馈作用极其重要。

本文试图采用临界摄动方法^[1],讨论均匀平衡态失稳后,在非线性强迫作用下,耗散结构解(即 Benard 热对流)形成的过程。研究表明:当上下界面温差超过一定数值时,在 $X-Z$ 剖面可形成上升、下沉相间排列的稳定定常气流运动。当参数取适当的数值时,垂直及水平速度、温度随高度的变化与实验结果吻合。在数值计算的基础上,对解的各级近似振幅作了数值比较,说明在一定条件下,临界摄动方法求得的近似解收敛速度较快,因而解是有意义的。又指出 Lorenz 在讨论热对流时所采用的低谱截断作为本文导出的拟一级近似解是合理的。同时,稳定解也显示了超临界的分叉性质。

二、Boussinesq 近似运动方程组

类似于文献[2],含有分子粘性及热扩散的热对流基本运动方程组为

本文 1990 年 3 月 20 日收到,11 月 2 日收到修改稿。

* 现在工作单位:涪陵地区国土局。

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho_0 (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla p - \rho g \hat{z} + \eta \nabla^2 \vec{V} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T \\ \nabla \cdot \vec{V} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, η, κ 分别表示分子粘性及热扩散系数。 \hat{z} 表示 z 方向的单位矢量。 ρ_0 为常数, 是温度为 T_0 的密度, $\rho = \rho_0(1 + \alpha(T_0 - T))$, α 为热膨胀系数, 其余的为气象常用符号。

垂直边界条件取为

$$\begin{cases} z = 0, T = T_0, \vec{V} = 0 \\ z = h, T = T_h, \vec{V} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.2) 式表示气流在高度为 h 的两层不同温度的固定边界中运动。不难解出满足边界条件 (2.2)、且不含宏观对流的定态解为

$$\begin{cases} \vec{V}_s = 0 \\ T_s = T_0 - \beta z \\ \rho_s = \rho_0(1 + \alpha\beta z) \\ p_s = p_0 - g\rho_0(z + \frac{1}{2}\alpha\beta z^2) \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 $\beta = (T_0 - T_h)/h$ 为垂直温度梯度, p_0 是 $z=0$ 处的静压力, 均设为常数。

将解分解成基本场和扰动场

$$\begin{cases} \vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}_s + \vec{V}'(\vec{r}, t) \\ p(\vec{r}, t) = p_s + p'(\vec{r}, t) \\ \rho(\vec{r}, t) = \rho_s + \rho'(\vec{r}, t) \\ T(\vec{r}, t) = T_s + T'(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (2.4)$$

“'”表示扰动量。引入无量纲量, 即

$$\begin{cases} \vec{r}^* = \vec{r}/h, T^* = gah^3 T' / \gamma\kappa \\ p^* = h^2 p' / p_0 \gamma\kappa, t^* = t\kappa/h^2 \\ \vec{V}^* = h\vec{V}' / \kappa \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 $\gamma = \eta/\rho_0$ 。于是可将 (2.1) 化成无量纲方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} = \sigma \{-\nabla p + \nabla^2 \vec{V}^* + T^* \hat{z}\} - (\vec{V}^* \cdot \nabla) \vec{V}^* \\ \frac{\partial T^*}{\partial t} = R w + \nabla^2 T^* - (\vec{V}^* \cdot \nabla) T^* \\ \nabla \cdot \vec{V}^* = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

式中, 已略去“*”。 w 为垂直运动速率, $\sigma = \gamma/\kappa$ 为 Prandtl 数, 对于大气取 $\sigma \approx 0.7 \sim 1$ ^[3]。 $R = ag\beta h^4 / \gamma\kappa = ag(T_0 - T_h)h^3 / \gamma\kappa$ 为 Rayleigh 数。将 (2.6) 第一式连续取两次旋度, 并应用矢量运算法则及无辐散方程 $\nabla \cdot \vec{V}^* = 0$, 可变为

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \vec{V}^* = \sigma \{-\nabla \frac{\partial T^*}{\partial z} + \nabla^2 T^* \hat{z} + \nabla^2 \vec{V}^*\} + \nabla \times \nabla \times (\vec{V}^* \cdot \nabla \vec{V}^*) \quad (2.7)$$

用 \hat{z} 点乘上式, 得 \hat{z} 方向的投影方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \vec{v} = \sigma \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} T + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T + \nabla^4 w \right\} + \hat{z} \cdot [\nabla \times \nabla \times (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v})] \quad (2.8)$$

为简单起见,仅讨论 $X-Z$ 剖面的运动。且仅考虑垂直速度、温度的垂直分布不均引起的非线性平流作用,那么(2.6)第二式及(2.8)式可简化为如下的闭合方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w = \sigma \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} T + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 w \right\} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} = R w + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T - w \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases} \quad (2.9)$$

边界条件(2.2)变为

$$\begin{cases} z = 0, w = 0, T = 0 \\ z = 1, w = 0, T = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

x 方向为周期运动。下面作稳定性分析,设满足边界条件的解为

$$\begin{cases} w = w_{nk} \sin kx \sin n\pi z e^{\omega t} \\ T = T_{nk} \sin kx \sin n\pi z e^{\omega t} \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.11)$$

其中 k 为 x 方向的波数。忽略(2.9)的非线性项,将(2.11)代入,根据系数 w_{nk}, T_{nk} 为非零解的条件,可确定扰动系统不稳定的条件为

$$(k^2 + n^2 \pi^2)^3 < R k^2 \quad (2.12)$$

即临界 R_c 为^[2]

$$R_c = R_c(k) = \frac{(k^2 + n^2 \pi^2)^3}{k^2} \quad (2.13)$$

由 $\frac{dR_c}{dk} = 0$, 可定出最不稳定性波数 $k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} n$ 。

代入(2.13)可确定最不稳定性临界参数 $\bar{R}_c = \frac{27}{4} \pi^4 n^4$ 。在 (k, R) 参数平面(图1)标明了稳定与不稳定性区域。不难看出,对应确定的 k , 存在一个 $R_c(k)$, 当 $R < R_c$ 时,系统稳定,扰动不发展;当 $R > R_c$ 时,系统发生不稳定性,扰动可能发展。

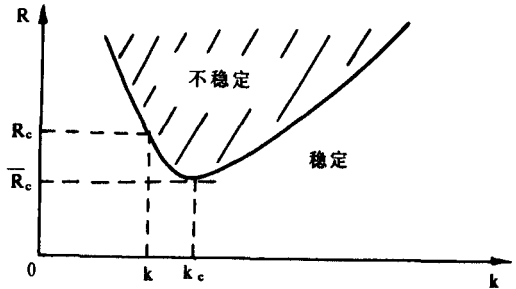


图1 稳定性示意图

另一方面,由定义 $R = \alpha g \beta h^4 / \gamma \kappa$ 可知,分子粘性系数 η 及热扩散系数 κ 越小, R 越大,系统越不稳定性,易发展。反之,则稳定性增加,扰动不易发展。

三、临界摄动法及耗散结构解

由上节讨论可知,当 $R > R_c(k)$ 时,系统发生不稳定性。此时,引入非线性强迫作用后,系统怎样发展呢? 本节将阐明,若系统产生新的稳定解,必须使线性微分算子的伴随算子的零本征向量与强迫作用项满足某种正交条件,即要求稳定解具有光滑的(谐波)函数形式。从物理学的观点看,即是系统与外界环境不断交换物质和能量,通过内部能量耗散过程,

平衡态失去稳定性, 扰动被放大而使体系形成耗散结构的过程。

因特征根为实数, 分支解是定态的。令 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, 则可将(2.9)改写成矩阵形式

$$L \begin{pmatrix} w \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} \sigma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 & \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ R & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \tag{3.2a}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(w \frac{\partial}{\partial z} w \right) \\ w \frac{\partial}{\partial z} T \end{pmatrix} \tag{3.2b}$$

当 $R > R_c$ 时, 设存在一未知小参数 $\varepsilon > 0$, 临界摄动展开为

$$\begin{cases} \delta = R - R_c = \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \delta_3 + \dots \\ \begin{pmatrix} w \\ T \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} w_0 \\ T_0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} w_1 \\ T_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} w_2 \\ T_2 \end{pmatrix} + \dots \end{cases} \tag{3.3}$$

定义临界线性算子

$$L_c = \begin{pmatrix} \sigma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 & \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ R_c & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

将(3.1)改写成

$$L_c \begin{pmatrix} w \\ T \end{pmatrix} = (L_c - L) \begin{pmatrix} w \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

将(3.3)式代入(3.5)式, 得到逐级展开方程

$$L_c \begin{pmatrix} w_i \\ T_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \tag{3.6}$$

式中

$$\begin{cases} A_0 = B_0 = 0 \\ A_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(w_0 \frac{\partial}{\partial z} w_0 \right), B_1 = w_0 \frac{\partial}{\partial z} T_0 - \delta_1 w_0 \\ A_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(w_0 \frac{\partial}{\partial z} w_1 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(w_1 \frac{\partial}{\partial z} w_0 \right) \\ B_2 = w_1 \frac{\partial}{\partial z} T_0 + w_0 \frac{\partial}{\partial z} T_1 - \delta_1 w_1 - \delta_2 w_0 \\ \dots \end{cases} \tag{3.7}$$

下面逐级求解方程(3.6)式。

1. $O(\varepsilon)$ 近似

$$L_c \begin{pmatrix} w_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

设满足边界条件的解为

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \sin n\pi z \sin kx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

x 方向同样可选择 $\cos kx$ 函数或更一般的 $\sin(kx + \phi)$ (ϕ 为位相), 这种情况除与(3.9)差一位相外, 并无实质区别, 所以不赘述。将(3.9)代入(3.8)式, 根据 a_0, b_0 为非零解的条件可解出

$$a_0/b_0 = k^2/(k^2 + n^2\pi^2)^2 = (k^2 + n^2\pi^2)/R, \quad (3.10)$$

其中 a_0, b_0 之一应由实验确定。

2. $O(\varepsilon^2)$ 近似

$$L_c \begin{pmatrix} w_1 \\ T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

此式为非齐次方程。由于 L_c 的系数行列式 $|L_c| = 0$, 根据泛函理论中 Fredholm 两者择一定理^[4], 方程(3.11)有解的条件是使 L_c 的伴随算子 $L_c^* = L_c^T$ 的零本征向量 $\begin{pmatrix} w^* \\ T^* \end{pmatrix}$, 即满足

$$L_c^* \begin{pmatrix} w^* \\ T^* \end{pmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

与 $\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix}$ 正交, 或表示成公式

$$\left[\left(w^*, T^* \right) \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} \right] = \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \int_0^1 (w^* A_i + T^* B_i) dz dx = 0 \quad (3.13)$$

同理, $\begin{pmatrix} w^* \\ T^* \end{pmatrix}$ 由(3.12)确定为

$$\begin{pmatrix} w^* \\ T^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \sin n\pi z \sin kx \quad (3.14)$$

c_1, c_2 的相对关系为

$$c_1/c_2 = R/(k^2 + n^2\pi^2)^2 = (k^2 + n^2\pi^2)/k^2 \quad (3.15)$$

将(3.7)、(3.9)及(3.14)式代入可解条件(3.13)式中, 其等式成立的充要条件是

$$\delta_1 = 0 \quad (3.16)$$

3. $O(\varepsilon^3)$ 近似

$$L_c \begin{pmatrix} w_2 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

同理, 可解条件为

$$\left[\left(w^*, T^* \right) \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (3.18)$$

因 A_2, B_2 中含有 w_1, T_1 , 所以先确定(3.11)的解, 由

$$L_c \begin{pmatrix} w_1 \\ T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\pi k^2 a_0^2 \sin 2\pi n z \cos 2kx \\ \frac{1}{4} n\pi a_0 b_0 \sin 2\pi n z (1 - \cos 2kx) \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

将 $\begin{pmatrix} w_1 \\ T_1 \end{pmatrix}$ 展成如下的 Fourier 级数形式

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ T_1 \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \sum_{l_1=0}^{\infty} \bar{p}_{ml_1} \cos l_1 kx \\ \sum_{l_2=0}^{\infty} \bar{q}_{ml_2} \cos l_2 kx \end{pmatrix} \sin m\pi z \tag{3.20}$$

代入(3.19)式, 讨论得

(1) 当 $m \neq 2n$ 时, l_1, l_2 任意, 都有

$$\bar{p}_{ml_1} = \bar{q}_{ml_2} = 0$$

(2) 当 $m = 2n$ 时

若 $l_1 = l_2 = 0$, 比较(3.19)式两边函数系数, 求得

$$\bar{p}_{2n,0} = 0, \quad \bar{q}_{2n,0} = -\frac{a_0 b_0}{16n\pi} \tag{3.21}$$

若 $l_1 = l_2 = 2$, 可求得

$$\begin{cases} \bar{p}_{2n,2} = \frac{n\pi\tau k^2 a_0^2 + n\pi\sigma k^2 a_0 b_0}{\sigma\tau^3 - 4R_c\sigma k^2} \\ \bar{q}_{2n,2} = \frac{\frac{1}{4}n\pi\sigma\tau^2 a_0 b_0 + n\pi R_c k^2 a_0^2}{\sigma\tau^3 - 4R_c\sigma k^2} \end{cases} \tag{3.22}$$

其中, $\tau = 4(k^2 + n^2\pi^2)$ 。综上所述, w_1, T_1 可表示成

$$\begin{cases} w_1 = \bar{p}_{2n,2} \sin 2\pi n z \cos 2kx \\ T_1 = \bar{q}_{2n,0} \sin 2\pi n z + \bar{q}_{2n,2} \sin 2\pi n z \cos 2kx \end{cases} \tag{3.23}$$

于是, 根据(3.18), 并将(3.9)、(3.14)、(3.23)式代入, 经过冗长的积分运算, 得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{8}n\pi^2 k a_0 c_1 \bar{p}_{2n,2} - \frac{1}{8}n\pi^2 \frac{1}{k} b_0 c_2 \bar{p}_{2n,2} \\ & - \frac{1}{4}n\pi^2 \frac{1}{k} a_0 c_2 (2\bar{q}_{2n,0} - \bar{q}_{2n,2}) - \frac{\pi}{2k} a_0 c_2 \delta_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

解出 δ_2 , 得

$$\begin{aligned} \delta_2 = & -\frac{1}{4}n\pi k^2 (c_1/c_2) \bar{p}_{2n,2} - \frac{1}{4}n\pi (b_0/a_0) \bar{p}_{2n,2} \\ & + \frac{1}{2}n\pi (\bar{q}_{2n,2} - 2\bar{q}_{2n,0}) \end{aligned} \tag{3.25}$$

设 $\delta_2 > 0$ (本文仅限于讨论这种情形)。根据摄动展开(3.3)第一式, 求出

$$\varepsilon \approx \pm \sqrt{\frac{R - R_c}{\delta_2}} \tag{3.26}$$

将(3.26)代回(3.3)第二式, 可解出近似解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w \\ T \end{pmatrix} &\approx \pm \sqrt{\frac{R-R_c}{\delta_2}} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \sin n\pi z \sin kx \\ &+ \frac{R-R_c}{\delta_2} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{q}_{2n,0} \end{pmatrix} \sin 2n\pi z + \frac{R-R_c}{\delta_2} \begin{pmatrix} \bar{p}_{2n,2} \\ \bar{q}_{2n,2} \end{pmatrix} \sin 2n\pi z \cos 2kx \end{aligned} \quad (3.27)$$

因已设 $\delta_2 > 0$, 表明系统发生了超临界分叉, 其分支解是稳定的^[5]。

由 $X-Z$ 剖面的散度方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.28)$$

积分得(令积分常数为零)

$$\begin{aligned} u &= - \int \frac{\partial w}{\partial z} dx = \pm \frac{n\pi}{k} \sqrt{\frac{R-R_c}{\delta_2}} a_0 \cos n\pi z \cos kx \\ &\quad - \frac{n\pi}{k} \left(\frac{R-R_c}{\delta_2} \right) \bar{p}_{2n,2} \cos 2n\pi z \sin 2kx \end{aligned} \quad (3.29)$$

(3.27)、(3.29)式即为本文求得的 Benard 热对流速率、温度在 $X-Z$ 剖面分布的解析式。因其是在开放(下垫面加热)和不可逆(有耗散)、系统远离平衡态情况下, 扰动被放大形成的稳定有序解, 故称为耗散结构解。

四、讨 论

1. 计算(3.27)、(3.29)式各项振幅的大小。取 $k=k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}}n$, $R_c = \bar{R}_c = \frac{27}{4}\pi^4 n^4$, $\sigma=1$, 经计算可得

$$\begin{aligned} a_0/b_0 &\approx 2.2583 \times 10^{-2} n^{-2} \\ c_1/c_2 &\approx 2.9881 \\ \bar{q}_{2n,0} &\approx -4.4950 \times 10^{-4} n^{-3} b_0^2 \\ \bar{p}_{2n,2} &\approx 4.0630 \times 10^{-6} n^{-5} b_0^2 \\ \bar{q}_{2n,2} &\approx 3.3346 \times 10^{-4} n^{-3} b_0^2 \\ \delta_2 &\approx 1.8252 \times 10^{-3} n^{-2} b_0^2 \end{aligned}$$

设 $R-R_c = 10^{-3} n^{-2} b_0^2$, $b_0=1$, 故(3.27)、(3.29)式的解为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} w \\ T \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1.6716 \times 10^{-2} n^{-2} \\ 0.7402 \end{pmatrix} \sin n\pi z \sin k_c x + \begin{pmatrix} 0 \\ -2.4628 \times 10^{-4} n^{-3} \end{pmatrix} \sin 2n\pi z \\ \quad + \begin{pmatrix} 2.2261 \times 10^{-6} n^{-5} \\ 1.8270 \times 10^{-4} n^{-3} \end{pmatrix} \sin 2n\pi z \cos 2k_c x \\ u = \pm 2.3569 \times 10^{-2} n^{-2} \cos n\pi z \cos k_c x - 3.1391 \times 10^{-6} n^{-5} \cos 2n\pi z \sin 2k_c x \end{cases} \quad (4.1)$$

取(4.1)式的第一分支。分别讨论 x 取 $0, \frac{\pi}{2k_c}, \frac{3\pi}{2k_c}, \frac{2\pi}{k_c}$ (即一个水平周期内)各物理量随高度的变化。

(1) 在 $x=0$ 处, $n=1$ 时, 上升运动为零。当 $z < \frac{1}{2}$, $u > 0$, 朝右运动; $z > \frac{1}{2}$, $u < 0$ 朝左运动。
 $n=2$ 时, $z < \frac{1}{4}$, 向右运动; $\frac{1}{4} < z < \frac{3}{4}$, 向左运动; $\frac{3}{4} < z < 1$, 向右运动。如图 2 所示。

(2) 在 $x = \frac{\pi}{2k_c}$ 处, 水平运动为零。当 $n=1$ 时, 为上升运动。在 $z = \frac{1}{2}$ 处达最大值, 且 $T > 0$ 。
 当 $n=2$ 时, 在 $z < \frac{1}{2}$ 处为上升运动; $z > \frac{1}{2}$ 处为下沉运动。相应地有 $z > \frac{1}{2}$, $T < 0$; $z < \frac{1}{2}$, $T > 0$ 。如图 3、图 4 所示。

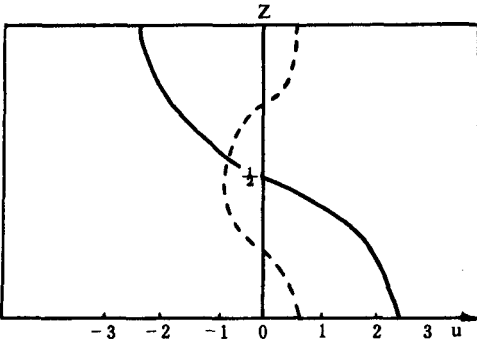


图 2 u 随高度的变化

($n=1$ 实线, $n=2$ 虚线, 单位: 10^{-2})

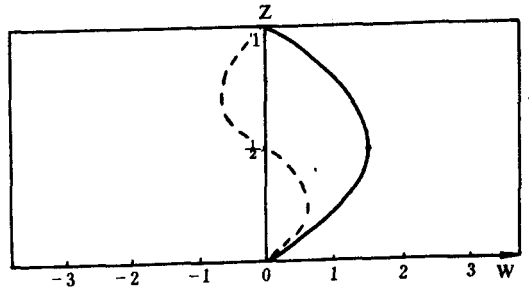


图 3 垂直速率随高度的变化

(说明同图 2)

(3) 在 $x = \frac{3\pi}{2k_c}$ 处, 情形恰好与 (2) 相反。

(4) 在 $x = \frac{2\pi}{k_c}$ 处, 情形与 (1) 相同。

$n=1$ 和 $n=2$ 时, 由 (4.1) 所描述的 Benard 热对流在 $X-Z$ 剖面的流线分布 (理想状态) 如图 5、图 6 所示。这种现象的产生可描述为: 当 $R < R_c$ 时, 分子处在杂乱无章的排列状态, 大气静止; 当 $R > R_c$ 时, 就象分子中有一个指挥中心, 命令周围分子协同起来

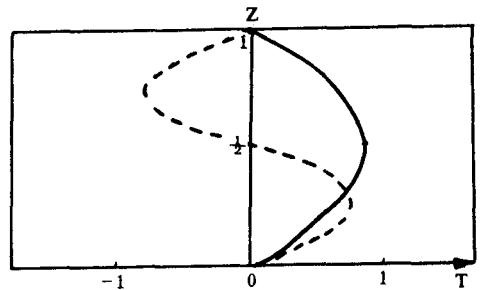


图 4 温度随高度的变化

($n=1$ 实线, $n=2$ 虚线, 单位: 1)

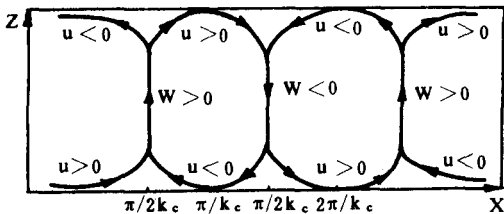


图 5 $n=1$ 的流线分布

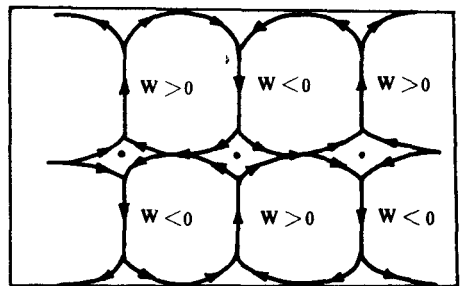


图 6 $n=2$ 的流线分布

集体向上运动, 形成垂直运动, 当空气到达上边界后, 便向左右两边分开, 再向下运动, 形成对流泡。这些对流泡是内部协同组织形成的结果。因而, Benard 热对流也是一个自组织

过程。

由(4.1)分析可知,一级近似振幅远大于二级近似振幅,这说明临界摄动方法,在一定的参数取值下,收敛速度较快,方法有效。另外, Lorenz 采用的低谱截断^[6]

$$\begin{pmatrix} w \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sin n\pi z \sin kx + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \sin 2n\pi z$$

是本文求得的拟一级近似解,说明 Lorenz 低谱截断在某种条件下是正确的。

2. Benard 系统不稳定激发的解(3.27)、(3.29)是弱非线性强迫作用下的解。其一级近似振幅前的正负号表示系统出现了分叉。因 $\delta_2 > 0$, 所以分叉是超临界的,且解稳定。图7(以 w 为例)直观地阐明了这种分叉过程。系统最终取哪一支,应由随机的扰动(涨落)决定。

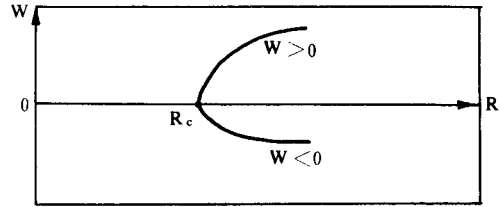


图7 超临界分叉示意图

本文仅仅是求出了一级分支解。事实上,当参数 R 逐渐增大,远离 R_c 值,系统还会进一步分叉下去,形成二级分支和高级分支,甚至出现混沌,数值模拟已经证实了这一点^[7]。

致谢:欧阳首承副教授对本文提出过宝贵意见,谨表衷心感谢!

参 考 文 献

- [1] 李如生,非平衡态热力学和耗散结构,清华大学出版社,215—230,1986年。
 [2] 同上,288—297。
 [3] 刘式达,内波动力学中的浑沌和大气湍流的发生,中国科学(B辑),第五期,542—543,1986。
 [4] 同[1],225—226。
 [5] 同[1],187—188。
 [6] Lorenz, E. N., Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130—141, 1963。
 [7] 杨硕文等,封闭容器中的 Benard 对流数值模拟研究——I. 二维问题,中国科学(B辑),第8期,886—896,1990。

THE SPACIAL DISSIPATIVE STRUCTURE SOLUTIONS EXCITED BY UNSTABLE DISTURBANCE OF BENARD THERMAL CONVECTION

Wu Yong

(Fuling Prefecture Meteorological Bureau, Sichan Province)

Abstract

In this paper, by means of the critical perturbation method, the formation of the stable solutions of spacial dissipative structure of Benard thermal convection, by incorporating the nonlinear forcing terms into the system after destruction of its equilibrium state, is examined. The results show that when the parameters are suitable values, the vertical and horizontal velocities, temperature change with the height, and the distribution of streamline on X—Z cross-section are basically consistent with the experimental results. Moreover, the solutions have the characteristic of the supercritical bifurcations.