第3卷 第1期　应用气象学报　Vol.3, №1
1992年2月　QUARTERLY JOURNAL OF APPLIED METEOROLOGY　February 1992

以Schrödinger方程为例子介绍直接解法及其在波与波碰撞中的应用

高守亭　　刘坤儒

（中国科学院大气物理研究所）（徐州教育学院）

提　要

本文以描述某些中尺度系统振幅演变的Schrödinger方程为例子，着重介绍了直接解法及其在波与波的碰撞相互作用过程中的应用。

一、引　言

目前对中尺度天气系统的研究十分重视，随着观测资料的积累，对某些中尺度现象的认识也日趋清楚，在其结构和发生的环境条件方面已有不少分析。但在动力学研究方面，普遍感到难办的是中尺度现象不满足静力平衡和地转关系，一般是非静力和非地转的。因此，不易做到象大尺度系统那样，可以把运动方程和热力方程约化成一个位涡方程来描述，进尔求解。所以目前对中尺度系统的研究，主要集中在它们的发生机制，比如用对称不稳定来解释某些中尺度现象的发生等。笔者认为，对中尺度系统振幅演变问题的研究最有效的工具之一是直接解法，因为很多中尺度系统的振幅演变方程可用Schrödinger方程或广义的Schrödinger方程（当考虑耗散时）来描述，而求解Schrödinger方程的有效且简便的方法是直接解法。当然，从原则上，对任意初值的Schrödinger方程都可以用逆散射反演变换来求解[1]，但做起来是相当麻烦的，在实际中很少运用，真正实际可行的还是直接解法，特别在研究波与波的碰撞相互作用时，直接解法更有其优越性。

二、与中尺度现象有关的Schrödinger方程

对一维问题，比如研究大气中飑线的激发和演变过程，常使用如下方程：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(u_g+u)\frac{\partial}{\partial x}\right]u-fv+\frac{\partial\phi^*}{\partial x}=0 \tag{1}$$

本文1989年6月23日收到，1990年12月20日收到修改稿。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u_g + u)\frac{\partial}{\partial x}\right]v + fu = 0 \tag{2}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u_g + u)\frac{\partial}{\partial x}\right]\phi^* - fu_g V + (c_D^2 + \phi^*)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

以上方程组借助于约化摄动法，可求得振幅演变方程为(计算从略)：

$$i\phi_\tau + p\phi_{\xi\xi} + Q|\phi|^2\phi = 0 \tag{4}$$

对二维问题，比如研究大气中的对流问题，通常使用两层模式：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\psi_1 + (\psi_2 - \psi_1)F\right] = 0 \tag{5}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\psi_2 + (\psi_1 - \psi_2)F\right] = 0 \tag{6}$$

可求得振幅方程为[2]：

$$i\chi\frac{\partial A}{\partial x_2} = \pm\alpha_3 A - \beta_3|A|^2A + \gamma_3\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} \tag{7}$$

方程(7)是广义的 Schrödinger 方程。

对三维问题，比如大气中非线性波动的研究，可得到振幅演变方程为[3]：

$$a\phi_\tau + b_{ij}\phi_{\xi_i\xi_j} + c|\phi|^2\phi = 0 \tag{8}$$

(8)式仍为 Schrödinger 方程。由以上分析可以看出，Schrödinger 方程不仅在等粒子体研究方面使用普遍，而且在中尺度系统中的研究方面，也是相当普遍应用的方程。因此，以 Schrödinger 方程为例子介绍直接解法有助于中尺度动力学的研究。

三、关于直接解法

1976 年 Hirota 首先提出求解非线性演变方程的一种直接方法[4]。他的基本思想是，对一类非线性方程，若设其解的形式为

$$\phi = \frac{G(\xi,\tau)}{F(\xi,\tau)} \tag{9}$$

将此解先代入非线性方程，以改变原来要解的非线性演化方程。然后再寻找 G 与 F 满足的特殊形式的偏微分方程，进尔将 F 和 G 展成幂级数，再确定其系数。结果发现，在很多问题中，这些级数会从某一阶起自然中断，从而得到精确解。

根据这种思想，我们可以去求解 Schrödinger 方程。因为若将(9)式代入 Schrödinger 方程(4)式后有

$$\begin{aligned} &i(FG_\tau - F_\tau G) + P(FG_{\xi\xi} - 2F_\xi G_\xi + GF_{\xi\xi}) - 2PGF_{\xi\xi} \\ &+ 2P\frac{G}{F}F_\xi^2 + QGG^*\frac{G}{F} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

这里 G^* 是 G 的共轭，F 取为实数，有 $F^* = F$。如果引入微分算子

$$i\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\tau'}\right)G(\tau,\xi)F(\tau',\xi')\Big|_{\substack{\tau'=\tau\\ \xi'=\xi}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^2 G(\tau,\xi)F(\tau',\xi')\Big|_{\substack{\tau'=\tau\\ \xi'=\xi}}$$

则(10)式可以写为

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\tau'}\right)+P\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^2\right]G(\tau,\xi)F(\tau',\xi')\Big|_{\substack{\tau'=\tau\\ \xi'=\xi}}$$

$$-P\frac{G}{F}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^2F(\tau,\xi)F(\tau',\xi')\Big|_{\substack{\tau'=\tau\\ \xi'=\xi}}-\frac{Q}{p}GG^*\right]=0 \tag{11}$$

若在方程(11)中令前面部分为零,则后面剩下部分也应为零。这意味着 F 和 G 应满足

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\tau'}\right)+P\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^2\right]G(\tau,\xi)F(\tau',\xi')\Big|_{\substack{\tau'=\tau\\ \xi'=\xi}}=0 \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^2F(\tau,\xi)F(\tau',\xi')\Big|_{\substack{\tau'=\tau\\ \xi'=\xi}}-\frac{Q}{P}GG^*=0 \tag{13}$$

这时若再设 G 与 F 有级数解的形式:

$$G=g_1+g_3+g_5+\cdots \tag{14}$$

$$F=1+f_2+f_4+f_6+\cdots \tag{15}$$

则知:

$$G\cdot F=g_1+(g_3+g_1f_2)+\cdots \tag{16}$$

$$F\cdot F=1+2f_2+(2f_4+f_2^2)+\cdots \tag{17}$$

将(14)—(17)代入(12)式后可得

$$i\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+P\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)g_1=0 \tag{18}$$

$$i\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+P\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)g_3+i\left(f_2\frac{\partial g_1}{\partial\tau}-g_1\frac{\partial f_2}{\partial\tau}\right)+P\left(f_2\frac{\partial^2 g_1}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial f_2}{\partial\xi}\frac{\partial g_1}{\partial\xi}+g_1\frac{\partial^2 f_2}{\partial\xi^2}\right)=0 \tag{19}$$

……

将(14)—(17)式代入(13)式可得

$$2\frac{\partial^2 f_2}{\partial\xi^2}=\frac{Q}{P}|g_1|^2 \tag{20}$$

$$2\frac{\partial^2 f_4}{\partial\xi^2}+2f_2\frac{\partial^2 f_2}{\partial\xi^2}-2\left(\frac{\partial f_2}{\partial\xi}\right)^2=\frac{2Q}{P}R_e(g_1\cdot g_3^*) \tag{21}$$

……

我们把一个 Schrödinger 方程拆成多个方程其目的是更容易求解。因为若令:

$$g_1=e^{\eta} \tag{22}$$

这里 $\eta=\sqrt{\alpha}(\xi-c\tau)+i(k\xi-\omega\tau)=\tilde{p}\xi-\Omega\tau,\alpha=k^2-\frac{\omega}{p}$。易验证,$\tilde{p}$、$\Omega$ 满足原方程线性化的色散关系:

$$-i\Omega+P\tilde{p}^2=0 \tag{23}$$

代 g_1 到(20)式知:

$$f_2=\frac{Q}{2P}e^{\eta+\eta^*}\cdot\frac{1}{(\tilde{p}+\tilde{p}^*)^2} \tag{24}$$

$\tilde{p}^*$ 是 $\tilde{p}$ 的共轭。

已知 f_2,则可知 Schrödinger 方程的一阶解为:

$$\phi=\frac{G}{F}=\frac{g_1}{1+f_2}=e^{\eta}/\left[1+\left(\frac{Q}{2P}\frac{1}{(\tilde{p}+\tilde{p}^*)^2}e^{\eta+\eta^*}\right)\right] \tag{25}$$

方程(25)描述了 Schrödinger 方程的包络孤立波解。若将已知的 g_1, f_2 代入(19)和(21)，可知 $g_3=0, f_4=0$。如此下去，以后的 f 和 g 的项都全部为零。这就是说，从第二阶起级数自然中断。因此上述解便是精确解。可见，利用直接解法，很容易地找到了 Schrödinger 方程的一种精确解，足以说明直接解法在求解类似 Schrödinger 方程的一些非线性方程的问题中，具有明显的优越性，是一种强有力的工具。

四、波与波的碰撞相互作用

过去研究的波动之间的共振相互作用，主要指的是三波共振相互作用，通称共振三波组。Benney(1977)又提出了一种新型的共振三波，他称为长短波相互作用[5]。在这种长短波的相互作用中引出了双分叉的色散关系。这里研究的是另外一种波与波的相互作用，即是中尺度波动之间的碰撞相互作用。

若我们假设有两个波分别为：

$$\psi_1 = e^{\eta_1}, \quad \psi_2 = e^{\eta_2} \tag{26}$$

在线性情况下，当两波相遇时，应为两者的叠加，即

$$g_1 = \psi_1 + \psi_2 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} \tag{27}$$

这里设

$$\eta_1 = p_1\xi - \Omega_1\tau - \eta_{01}$$
$$\eta_2 = p_2\xi - \Omega_2\tau - \eta_{02}$$

则相应的线性色散关系为

$$-i\Omega_{1,2} + Pp_{1,2}^2 = 0 \tag{28}$$

以上仅是波的线性叠加，但实际上，描述中尺度波动演变的是满足 Schrödinger 方程，在波与波之间碰撞时，除线性作用外，必须考虑非线性的作用。因此，我们还必须将线性叠加后的波 g_1 代入 Schrödinger 方程的分解式(20)中去，使(20)式变为

$$2\frac{\partial^2 f_2^2}{\partial\xi^2} = \frac{Q}{P}\left(e^{\eta_1+\eta_1^*} + e^{\eta_1+\eta_2^*} + e^{\eta_1^*+\eta_2} + e^{\eta_2+\eta_2^*}\right) \tag{29}$$

对(29)式积分得

$$f_2 = \frac{Q}{2P}\left[\frac{e^{\eta_1+\eta_1^*}}{(p_1+p_1^*)^2} + \frac{e^{\eta_1+\eta_2^*}}{(p_1+p_2^*)^2} + \frac{e^{\eta_1^*+\eta_2}}{(p_1^*+p_2)^2} + \frac{e^{\eta_2+\eta_2^*}}{(p_2+p_2^*)^2}\right] \tag{30}$$

再将 g_1 代入(19)式，并利用(30)式，便可求出 g_3 为

$$g_3 = \frac{Q}{2P}(f_1-f_2)^2\left[\frac{e^{\eta_1+\eta_2+\eta_1^*}}{(p_1+p_1^*)^2(p_2+p_1^*)^2} + \frac{e^{\eta_1+\eta_2+\eta_2^*}}{(p_1+p_2^*)^2(p_2+p_2^*)^2}\right] \tag{31}$$

将已求得的 g_1, f_2, g_3 代入(21)式，就可解出 f_4 为

$$f_4 = \left(\frac{Q}{2P}\right)\frac{(p_1-p_2)^2(p_1^*-p_2^*)^2 e^{\eta_1+\eta_2+\eta_1^*+\eta_2^*}}{(p_1+p_1^*)^2(p_1+p_2^*)^2(p_2+p_1^*)^2(p_2+p_2^*)^2} \tag{32}$$

若继续算下去可知

$$g_5 = f_6 = g_7 = f_8 = g_9 = f_{10} = \cdots = 0 \tag{33}$$

即级数解自 g_5, f_6 后自然中断，因此最后得到两个波碰撞后的精确解为

$$\phi = (g_1 + g_3)/(1 + f_2 + f_4) \tag{34}$$

可见用直接解法来研究波与波之间的碰撞相互作用是十分方便的。从(34)式可以得知两波碰撞后,波的基本形状没有多少改变,但位相移动出现了实部和虚部(孤立波碰撞后没有此现象),因此存在着碰撞后是否稳定的问题,若不稳定则有波动的明显的发展。

五、Schrödinger 方程解的稳定性

上节指出波之间碰撞作用后,引起位相移动的改变,存在实部和虚部,有一个稳定性问题。因此,在求解 Schrödinger 方程之前,有必要找出解的稳定性判据。

因只考虑稳定性,我们可以设方程(4)的解为

$$\phi = i\beta_0 e^{i\sigma\tau} \tag{35}$$

将(35)式代入(4)后有

$$\sigma = Q\beta_0^2 \tag{36}$$

已知(35)式中的 ϕ 是 Schrödinger 方程的解。若给此解一个小扰动,即取:

$$\phi = i(\beta_0 + \varepsilon\beta)e^{i(\sigma\tau+\varepsilon\theta)} \tag{37}$$

其中 θ,α 为 ξ,τ 的函数。把(37)式代入(4)式后有线性化方程组

$$-\beta_\tau - P\beta_0\theta_{\xi\xi} = 0 \tag{38}$$

$$\beta_0\theta_\tau + \beta\sigma - P\beta_{\xi\xi} = 3\beta_0^2\beta Q \tag{39}$$

因是线性方程组,可假定解有如下形式

$$\beta = Ae^{i(k\xi-w\tau)} \tag{40}$$

$$\theta = Be^{i(k\xi-w\tau)} \tag{41}$$

将(40)和(41)式代入(38)和(39)式,就可求出:

$$\omega^2 = P^2k^2(k^2\text{-}2\beta_0^2\frac{Q}{P}) \tag{42}$$

由(42)式可知,只有$(k^2-2\beta_0^2\frac{Q}{P})>0$ 时,ω 才为实值,(4)式的解才能是稳定的,可见 Q 与 P 异号是使解稳定的必要条件。$\frac{Q}{P}$是表示 Schrödinger 方程中非线性部分与线性部分的比,若比值很小,说明非线性部分可略。方程本身就会退化。可见非线性方程中$\frac{Q}{P}$的值不能太小,一般不会出现在 Q 与 P 同号时,使得$(k^2-2\beta_0^2\frac{Q}{P})<0$ 的情况。

对二维的情况,若我们令:

$$\phi = \phi_0 e^{i(k\xi-\psi\tau)} \tag{43}$$

其中 $\psi = Pk^2 - Q\phi_0^2$

同样可以证明,(43)式稳定的判据为 P 与 Q 异号。

由以上分析可知,P 和 Q 异号是 Schrödinger 方程解的稳定判据,在使用直接解法去解 Schrödinger 方程时,应对解的稳定性做出判断。

六、讨论与结语

这里必须强调指出,用直接解法求得的解只是解的一种形式。它是否对应所研究问题的实际现象,还必须用资料来验证,因为非线性方程都具有多解性。

Hirota(1971)在研究KDV方程的N个孤立子解时已有了直接解法的思想,后来逐渐发展成一种方法。采用的具体步骤是:

1. 把一个非线性方程通过设分数解的形式约化成一个或两个二次的齐次方程。比如方程

$$\phi_{\xi\tau} = \phi - \beta\phi^3 \tag{44}$$

若令$\phi=g/f$,代入(44)式,则可得:

$$\beta g^2 = 2(ff_{\xi\tau} - f_\xi \cdot f_\tau) \tag{45}$$

及齐次方程:

$$fg_{\xi\tau} + gf_{\xi\tau} - g_{\xi\tau} - g_\tau f_\xi = 0 \tag{46}$$

可见,为了得到如(46)式这样的齐次方程,经常采取如(45)式那样使g^2等于由f及其有关导数表达的式子。在我们求解Schrödinger方程时同样使用了$\frac{Q}{P}g^2$同f及其导数的关系式(13)。这说明一旦把分数解代入到非线性方程中,为找出齐次方程,使用g^2同f及其导数关系相平衡是约化方程的关键。这样做对解虽有了某些限制,但求出的精确解,很可能就是所需要的解,只要用资料去验证。

2. 把g和f分别展成如(14)及(15)式那样的级数再确定其系数。

直接解法,在波与波的碰撞相互作用中有着重要的作用,值得重视。同时,直接解法研究气候现象中的阻高及持续干旱问题也有着重要的作用。

参 考 文 献

[1] Dodd, R. K., et al., Solitions and Nonlinear Wave Equations, pp98—118, Academic Press, London, 1982.
[2] Dodd, R. K., et al., Solition and Nonlinear Wave Equations, pp561—566, Academic Press, London, 1982.
[3] 高守亭、杨惠君,多维约化摄动和大气中的非线性波,大气科学,10,1,1986。
[4] Hirota, R., Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations, Lecture Notes in Mathematics, 515, ed., A. Dold, B. Eckmann, pp40—48, Berlin, Springer, 1976.
[5] Benney, D. J. A general theory for interactions between long and short waves, *Studies in Appl. Math.*, **56**, 81—94, 1977.

INTRODUCTION TO DIRECT SOLUTION METHOD AND ITS APPLICATION TO WAVE-WAVE COLLISIONS

Gao Shouting
(*Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica*)
Liu Kunru
(*Xuzhou Education College*)

Abstract

This paper, taking Schrödinger equation which may indicate the amplitude evolution of some mesoscale systems as an example, mainly describes the direct solution method and its application to the interaction of wave-wave collisions.