

三维空气质点轨迹的计算

朱艳秋 · 廖洞贤

(国家气象中心, 北京, 100081)

提 要

首先讨论了空气质点轨迹的计算方法, 然后利用一个十层有限区域原始方程模式作了计算。根据计算的流场和 12 小时一次的常规观测资料, 进行了时间分辨率从 30 分钟到 12 小时的轨迹精度分析。结果表明, 3 小时以内的时间采样可以很好地描述质点轨迹, 而 12 小时采样对于绝大多数质点都有明显的误差。

一、前 言

近年来, 轨迹分析以其直观的表现方式越来越受到人们的重视。气块轨迹常用于估计污染物和放射性物质的长距离输送, 在研究天气个例时, 轨迹的计算有助于更好地对天气过程作出准确的诊断分析, 使对系统发展的过程和机制有一个更明了的认识。Uccellini 和 Benjamin 等都曾利用轨迹配合其它物理因子进行了诊断分析^[1,2]。这样就涉及到质点轨迹的准确度问题。Merrill 对缓慢发展气旋进行了轨迹计算^[3], 发现用 12 小时间隔数据 15% 有明显方向性误差。本文研究了三维空气质点轨迹的计算问题, 主要讨论了轨迹计算的精度变化。

二、空气质点轨迹的计算方法^[4]

1. 在 P 坐标的情形

(1) 风场 首先, 需求出在若干时刻 ($t=t_0, t_1, \dots, t_N$) 直角地图投影坐标网格上的或经纬度网格坐标上的 u, v 风场; 垂直速度由连续方程

$$\nabla \cdot \vec{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (1)$$

得到

$$\omega = \omega_0 + \int_p^* \nabla \cdot \vec{v} dp \quad (2)$$

利用公式
$$\omega_s = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{V}_s \cdot \nabla p_s \quad (3a)$$

和
$$\nabla \cdot \int_p^p \vec{V} dp = \int_p^p \nabla \cdot \vec{V} dp + \vec{V}_s \cdot \nabla p_s \quad (3b)$$

有
$$\omega = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \nabla \cdot \int_p^p \vec{V} dp = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{B} \quad (4)$$

其中,
$$\vec{B} = \int_p^p \vec{V} dp$$

并且下标 s 代表地面值。

(2)位移 设质点在移动过程中加速度不变,其在 t_1 时刻的位置是 P_1 , 风速是 (u_1, v_1, ω_1) , 在 t_2 时刻的位置是 P_2 , 风速是 (u_2, v_2, ω_2) , 于是位移 D_x, D_y, D_z 各是

$$D_x = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)(t_2 - t_1) \quad (5a)$$

$$D_y = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(t_2 - t_1) \quad (5b)$$

$$D_z = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)(t_2 - t_1) \quad (5c)$$

如果以网格距作为长度单位,则无因次位移的分量是

$$\Delta \bar{\mu}_x = D_x/d = \frac{1}{2}[(\Delta \mu_x)_1 + (\Delta \mu_x)_2] \quad (6a)$$

$$\Delta \bar{\mu}_y = D_y/d = \frac{1}{2}[(\Delta \mu_y)_1 + (\Delta \mu_y)_2] \quad (6b)$$

$$\Delta \bar{\mu}_p = D_z/\Delta p = \frac{1}{2}[(\Delta \mu_p)_1 + (\Delta \mu_p)_2] \quad (6c)$$

其中, $(\Delta \mu_x)_1 = u_1(t_2 - t_1)/d$ $(\Delta \mu_x)_2 = u_2(t_2 - t_1)/d$ (7a)

$(\Delta \mu_y)_1 = v_1(t_2 - t_1)/d$ $(\Delta \mu_y)_2 = v_2(t_2 - t_1)/d$ (7b)

$(\Delta \mu_p)_1 = \omega_1(t_2 - t_1)/\Delta p$ $(\Delta \mu_p)_2 = \omega_2(t_2 - t_1)/\Delta p$ (7c)

因为一般空气质点不在网格上,如在点 $(i + \mu_x, j + \mu_y, k + \mu_p)$ 处, (其中 μ_x, μ_y, μ_p 是无因次数, $0 \leq \mu_x \leq 1, 0 \leq \mu_y \leq 1, 0 \leq \mu_p \leq 1$), 要求得 P_1, P_2 点的 \vec{V} 须插值。本文采用拉格朗日内插值公式, 设 A 为任一物理量, 则有

$$\begin{aligned} A = & (1 - \mu_x)(1 - \mu_y)(1 - \mu_p)A_{i,j,k} + \mu_x(1 - \mu_y)(1 - \mu_p)A_{i+1,j,k} \\ & + (1 - \mu_x)\mu_y(1 - \mu_p)A_{i,j+1,k} + \mu_x\mu_y(1 - \mu_p)A_{i+1,j+1,k} \\ & + (1 - \mu_x)(1 - \mu_y)\mu_p A_{i,j,k+1} + \mu_x(1 - \mu_y)\mu_p A_{i+1,j,k+1} \\ & + (1 - \mu_x)\mu_y\mu_p A_{i,j+1,k+1} + \mu_x\mu_y\mu_p A_{i+1,j+1,k+1} \end{aligned} \quad (8)$$

(3)质点路径 设用 $t = t_2$ 时的风场, 经插值求出 p_1 点 $(i + \mu_{x1}, j + \mu_{y1}, k + \mu_{p1})$ 的风 (u_1, v_1, ω_1) , 则 $\Delta \bar{\mu}_x, \Delta \bar{\mu}_y, \Delta \bar{\mu}_p$ 的零级近似是

$$(\Delta \bar{\mu}_x)^0 = (\Delta \mu_x)_1 = u_1(t_2 - t_1)/d \quad (9a)$$

$$(\Delta \bar{\mu}_y)^0 = (\Delta \mu_y)_1 = v_1(t_2 - t_1)/d \quad (9b)$$

$$(\Delta \bar{\mu}_p)^0 = (\Delta \mu_p)_1 = \omega_1(t_2 - t_1)/\Delta p \quad (9c)$$

于是

$$i + \mu_{x1} + (\Delta \bar{\mu}_x)^0 = i^0 + \mu_x^0 \quad (10a)$$

$$j + \mu_{y1} + (\Delta \bar{\mu}_y)^0 = j^0 + \mu_y^0 \quad (10b)$$

$$k + \mu_{p1} + (\Delta\bar{\mu}_p)^0 = k^0 + \mu_p^0 \quad (10c)$$

其中 i^0, μ_z^0 分别是上面第一式左端项之和的整数部分和小数部分, j^0, μ_y^0 和 k^0, μ_p^0 类似。这时 $(i^0 + \mu_z^0, j^0 + \mu_y^0, k^0 + \mu_p^0)$ 即为 $t=t_2$ 时质点位置 P_2 的零级近似, 记为 P_2^0 。

在点 $P_2^0(i^0 + \mu_z^0, j^0 + \mu_y^0, k^0 + \mu_p^0)$ 可利用 $t=t_2$ 时的风场, 用插值公式求出该点的风, 记为 $(u_2^0, v_2^0, \omega_2^0)$, 即 (u_2, v_2, ω_2) 的零级近似。于是我们可以求出 $\Delta\bar{\mu}_x, \Delta\bar{\mu}_y, \Delta\bar{\mu}_p$ 的一级近似:

$$(\Delta\bar{\mu}_x)^1 = \frac{1}{2} [(\Delta\mu_x)_1 + (\Delta\mu_x)_2^0] = \frac{1}{2} (u_1 + u_2^0)(t_2 - t_1)/d \quad (11a)$$

$$(\Delta\bar{\mu}_y)^1 = \frac{1}{2} [(\Delta\mu_y)_1 + (\Delta\mu_y)_2^0] = \frac{1}{2} (v_1 + v_2^0)(t_2 - t_1)/d \quad (11b)$$

$$(\Delta\bar{\mu}_p)^1 = \frac{1}{2} [(\Delta\mu_p)_1 + (\Delta\mu_p)_2^0] = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2^0)(t_2 - t_1)/\Delta p \quad (11c)$$

和 p_2 位置的一级近似(记为 p_2^1):

$$i + \mu_{z1} + (\Delta\bar{\mu}_x)^1 = i^1 + \mu_z^1 \quad (12a)$$

$$j + \mu_{y1} + (\Delta\bar{\mu}_y)^1 = j^1 + \mu_y^1 \quad (12b)$$

$$k + \mu_{p1} + (\Delta\bar{\mu}_p)^1 = k^1 + \mu_p^1 \quad (12c)$$

这样, 在 P_2^1 点又可用插值求得其风的一级近似, 即为 $(u_2^1, v_2^1, \omega_2^1)$, 如此继续, 直到

$$[(\Delta\bar{\mu}_x)^{\gamma+1} - [(\Delta\bar{\mu}_x)^\gamma]^2 + [(\Delta\bar{\mu}_y)^{\gamma+1} - (\Delta\bar{\mu}_y)^\gamma]^2 + [(\Delta\bar{\mu}_p)^{\gamma+1} - (\Delta\bar{\mu}_p)^\gamma]^2] \leq \epsilon \quad (13)$$

迭代停止, 这里 γ 和 $\gamma+1$ 各表示 γ 和 $\gamma+1$ 次近似。

2. 在 σ -坐标的情形

在 σ 坐标中计算质点轨迹是利用模式模拟得到的风场 $(u, v, \dot{\sigma})$, 其水平方向位移和路径的求法与 p 坐标中相似。求垂直方向的位移、路径和利用(5)式时, 应将所有的 μ_p 以 μ_σ 代替, D_p 用 D_σ 替换, $\Delta\bar{\mu}_p$ 换成 $\Delta\bar{\mu}_\sigma$, $\Delta\sigma$ 代替 Δp , $\dot{\sigma}$ 代替 ω , 求出每一时刻质点的位置 (x, y, σ) , 然后将其换算到 p 坐标上。其中 $\Delta\bar{\mu}_\sigma$ 和 D_σ 定义为:

$$D_\sigma = \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2)(t_2 - t_1)$$

$$\Delta\bar{\mu}_\sigma = D_\sigma / \Delta\sigma$$

并且 μ_σ 是无因次数, 定义与 μ_p 类似, $0 \leq \mu_\sigma \leq 1$ 。

三、轨迹计算的精度分析

空气质点轨迹的准确度受气象观测的时、空分辨率、测量误差和采用的分析方法等的限制, 由于缺乏完整的数据场, 很难评价计算出的质点轨迹。为克服这一困难, 我们利用一个十层有限区域原始方程模式对 1979 年 3 月 29 日到 31 日亚洲大陆东海岸发生的一次爆发性发展的海岸气旋过程进行轨迹计算。模式结构详见十层有限区域细网格模式的试验研究^[6]。水平网格数 70×32 , 垂直层数为 10 层, 网格间距为 1.875° , 时间步长取 90 秒, 引入实际地形(图略), 初始场取自 FGGE III b 资料, 作了 48 小时模拟, 模式准确地再现了爆发性气旋的快速发展(图 1 和图 2)。据此模拟流场形成了试验研究的基本数据。为了试验方便, 我们假设时间分辨率为 30 分钟时算出的轨迹(试验 1)为参考值。

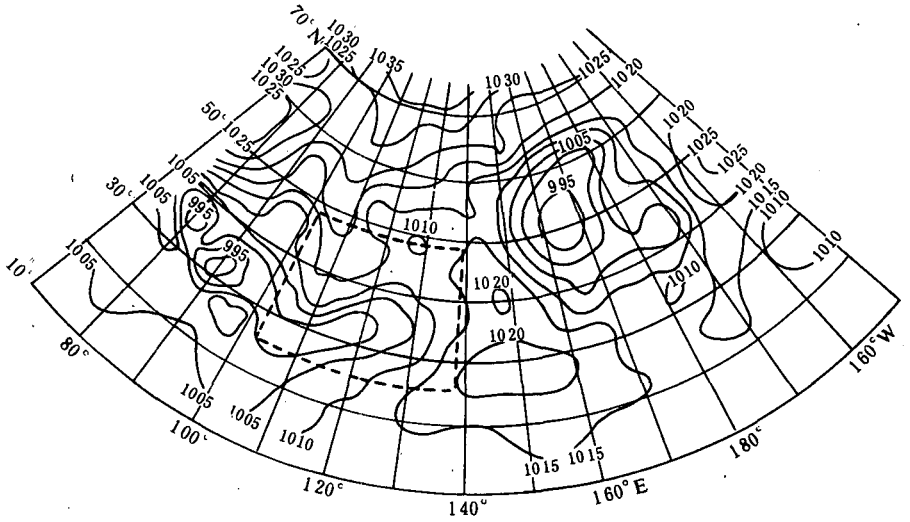


图 1 1979 年 3 月 29 日 12Z(世界时,下同)初始海平面气压

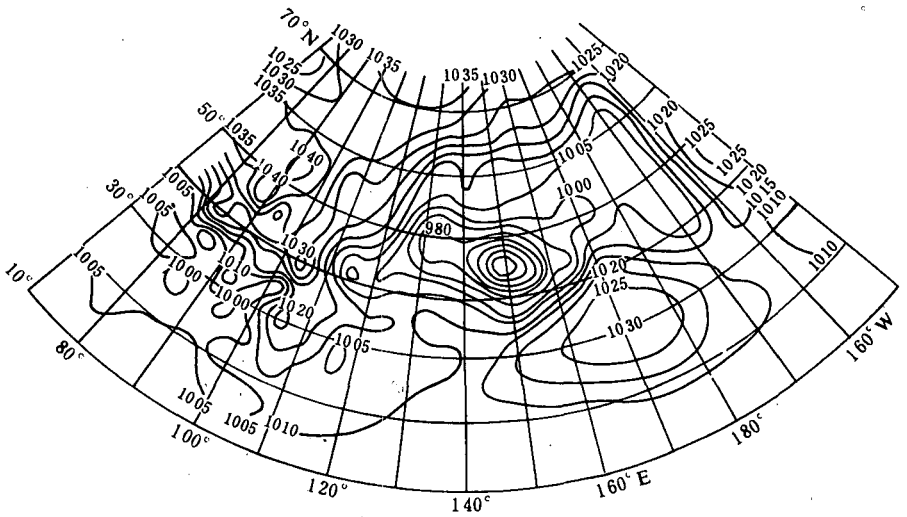


图 2 1979 年 3 月 31 日 12Z 48 小时预报海平面气压

我们选择了如图 1 中虚线框内所示的 260 个点作为初始位置。在每个试验中,计算了起点各在 700hPa 和 500hPa 上 260 个点的 48 小时轨迹。以一天两个时次的常规资料所做的轨迹计算是在 p 坐标上进行的,其余的都是在 σ 坐标上计算的。试验 2、3、4 时间分辨率分别为 3 小时、6 小时和 12 小时,试验 5 为以一天两个时次的常规资料(FGGE II b)作的轨迹计算。

图 3 和图 4 给出了试验 2、3、4、5 中起点分别在 700hPa(图 3)和 500hPa(图 4)的 260 个轨迹的平均均方根误差(相对于试验 1)。图 3 中试验 2 在 48 小时内的平均均方根水平误差和垂直误差均小于模式空间分辨率,说明 3 小时采样间隔计算轨迹能较好地表征三维流场的基本特点;而试验 4 在 48 小时内的平均均方根误差(折线 C)达到 800km 和 120hPa 以上,由此可见 12 小时的观测间隔对于长距离输送计算是不合适的,需要更高的

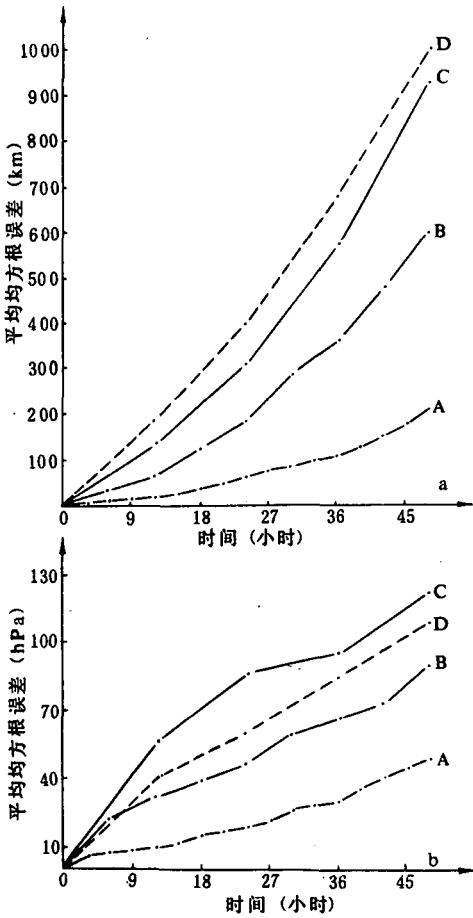


图3 以试验1为标准,试验2、3、4、5从700 hPa开始的260个轨迹的平均均方根误差(各以A、B、C、D表示,下同)(a)水平误差 (b)垂直误差

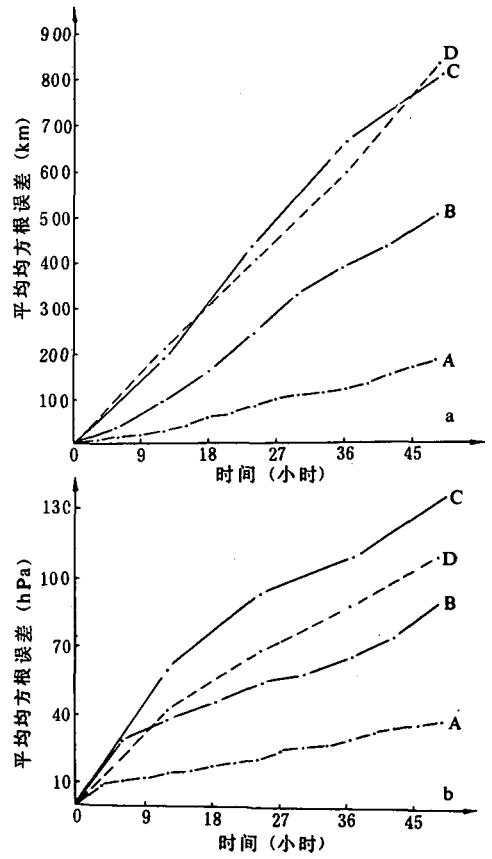


图4 从500 hPa开始的260个轨迹的平均均方根误差(说明同图3)(a)水平误差 (b)垂直误差

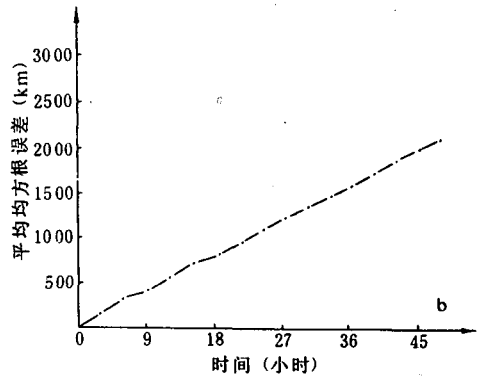
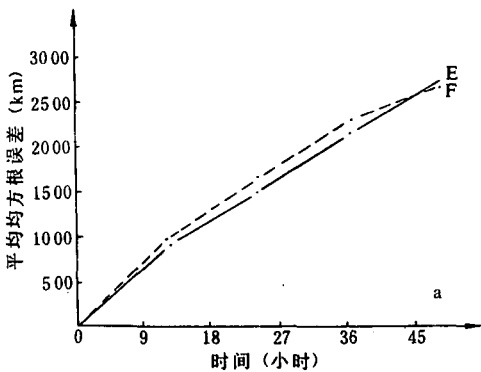


图5 二维质点轨迹平均均方根误差(a)12h常规资料 (b)模拟风场

观测频率。由图4可以得到同样的结论。从利用12小时间隔实测资料计算的平均均方根水平和垂直误差来看(折线D),D和C比较相近,尤其是起点为500hPa的轨迹,D和C的

水平误差相差无几。

另外,我们还作了二维轨迹计算。如图 5a 所示,试验 6 设计为:用 12 小时常规观测资料作从 700hPa 开始的 260 个质点的二维质点轨迹($\omega = 0$)分别与试验 1(折线 E)和试验 5(折线 F)的三维轨迹在等压面上的投影的位移差。由图上可以看出它们的平均均方根误差都很大,48 小时在 2700km 以上。

如果用模式模拟的风场作以 30 分钟为时间间隔,起点在 700hPa 的 260 个三维质点轨迹在等压面上的投影和二维质点轨迹的位移差,则可得到实验 7(图 5b)。可以看出,其 48 小时平均均方根误差在 2100km 以上。

四、结 语

计算表明,简化的二维轨迹有很大误差,不适合用来描述质点的轨迹。三维质点轨迹计算由于时间采样间隔不同而引起不同的误差变化,3 小时以内的采样间隔给出了相对准确的计算结果,而 12 小时间隔则不合适。当然,系统的发展速度也会对轨迹的计算误差产生影响。Merrill 发现对缓慢发展气旋,用 12 小时间隔数据 15%有明显误差。而本个例是爆发性气旋(在其发展最强阶段,降压率为 14hPa/12h),计算的质点轨迹中绝大多数有明显误差。

参 考 文 献

- [1] Uccellini, L. W. , The coupling of upper and lower tropospheric jet streaks and implications for the development of severe convective storms, *Mon. Wea. Rev.* , 107, 682—703, 1979.
- [2] Benjamin, S. G. and T. N. Carlson, Some effects of surface heating and topography on the regional severe storm environment, Part I ; Three-dimensional simulations, *Mon. Wea. Rev.* , 114, 307—329, 1986.
- [3] Merrill, J. T. et al. , Techniques of Lagrangian trajectory analysis in isentropic coordinates, *Mon. Wea. Rev.* , 114, 571—581, 1986.
- [4] 廖洞贤, 质点轨迹的计算, (待发表)。
- [5] Bates, J. R. and A. McDonald, Multiply—Upstream, semi-Lagrangian advective schemes: Analysis and application to a multi-level primitive equation model, *Mon. Wea. Rev.* , 110, 1831—1842, 1982.
- [6] 张玉玲、郭肖容等, 十层有限区域细网格模式的试验研究, 中期数值天气预报研究成果汇编(一), 152—168, 1990 年。

AN INVESTIGATION FOR COMPUTING THREE-DIMENSIONAL TRAJECTORY

Zhu Yanqiu Liao Dongxian

(National Meteorological Center, SMA, Beijing, 100081)

Abstract

A method for computing the trajectory is presented, and then a case study is made with the method by using a ten-level primitive equation model.

Comparing the results obtained from the data with different time intervals ranging from 30 minutes to 12 hours, including the conventional observations only twice a day shows that using those data with the intervals equal to or less than 3 hours can lead to accurate trajectory computations while significant discrepancies are found with 12 hour interval.