

有限区域内球谐展开的误差分析

游性恬 张冬峰

(北京气象学院,北京,100081)

提 要

以 500hPa 高度场为例在有限区域内进行球谐函数的展开。结果表明:当纬向截点数 L 为 64,且经圈截点为 32 时,对应于波数 $M=L/2=32$ 的球谐展开误差最小。这时对 4 种有限区域计算的谱展前后的均方根误差都小于 2.5 位势米(0.04%),最大绝对误差都小于 14 位势米(0.23%)。有限区域谱展前后的均方根误差比全球范围的相应值要小 2—3 位势米,这主要是由于在有限区域内纬向格距较小的缘故。

在数值天气预报中,讨论半球或全球问题时应用以球谐函数为基底的谱展开方法比较方便。但是在有限区域内进行谱展开有特殊的困难。因为气象要素在有限区域中不象在全球范围那样可以看成是以 2π 为周期的分布,因此不能直接用周期性的球谐函数作为展开级数的基函数。正因为如此,计算范围小于半球的业务预报谱模式至今还很少,其中主要有 Tatsumi(1986)^[1]的模式。他将该模式与 12 层的有限区域差分模式进行比较后指出,谱模式的 CPU 时间为差分模式的 1.2—1.3 倍,但预报的天气系统的位置更为准确。

本文采用廖洞贤(1989,1990)^[2,3]提出的一种在有限区域内对气象要素进行球谐展开的方案,其要点为:有限区域先分离出气象要素中的非周期部分,然后把具有周期性的剩余部分进行球谐展开。

1. 计算方法

设有限区域为经线 λ_1 和 λ_2 所包围、从南极到北极之间的地区(见图 1); $F(\lambda, \varphi)$ 为任一函数,可代表某一气象要素。

$$\text{令} \quad F(\lambda, \varphi) = \bar{F}(\lambda, \varphi) + \tilde{F}(\lambda, \varphi) \quad (1)$$

$$\text{其中} \quad \bar{F}(\lambda, \varphi) = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} [F(\lambda_2, \varphi) - F(\lambda_1, \varphi)] \quad (2)$$

$$\text{则有} \quad \tilde{F}(\lambda, \varphi) = F(\lambda, \varphi) - \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} [F(\lambda_2, \varphi) - F(\lambda_1, \varphi)] \quad (3)$$

由上可知, $\tilde{F}(\lambda, \varphi)$ 在边界 λ_1 和 λ_2 上恒等于 $F(\lambda_1, \varphi)$, 于是认为 $\tilde{F}(\lambda, \varphi)$ 呈以 $\lambda_2 - \lambda_1$ 为

1990年8月19日收到,1991年1月16日收到修改稿。

* 现在山西省气象局工作。

周期的空间分布。应用 Fourier 展开, $\tilde{F}(\lambda, \varphi)$ 可以表示为

$$\tilde{F}(\lambda, \varphi) = \sum_{m=-M}^M F^m(\varphi) \exp[i\hat{m}(\lambda - \lambda_1)] \quad (4)$$

这里 $I = \sqrt{-1}$, $\hat{m} = 2\pi m / (\lambda_2 - \lambda_1)$, M 是最大的纬向波数。

在两级, $F(\lambda, \varphi)$ 不随 λ 而变; $\bar{F}(\lambda, \varphi) \equiv 0$; 除 $m=0$ 的情况外, $F^m(\varphi)$ 也必须恒等于零(当 $m=0$ 时, 由上式可见, $\bar{F}(\lambda, \varphi)$ 已与 λ 无关, 故此时 $F^m(\varphi)$ 可不为零)。故可对 $\bar{F}(\lambda, \varphi)$ 和 $F^m(\varphi)$ 进行勒让德函数展开

$$\bar{F}(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^N \bar{F}_n P_n(\mu) \quad (5)$$

$$F^m(\mu) = \sum_{n=|m|}^M F_n^m P_n^m(\mu) \quad (6)$$

其中 $\mu = \sin\varphi$ (7)

图 1 有限区域范围

$$\bar{F}_n = \int_{-1}^1 \bar{F}(\lambda, \mu) P_n(\mu) d\mu \approx \sum_{j=1}^J \bar{F}(\lambda, \mu_j) P_n(\mu_j) W_j \quad (8)$$

$$F_n^m = \int_{-1}^1 F^m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu \approx \sum_{j=1}^J F^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) W_j \quad (9)$$

式中 $P_n(\mu)$ 和 $P_n^m(\mu)$ 分别表示标准化的勒让德函数和缔合勒让德函数。 W_j 为高斯积分系数。 N 代表可能分解的最大经向波数。 本文采用三角形截断, 故 $N=M$ 。 经圈上从南极到北极的高斯截点数设为 J 。

综合以上各式, 在有限区域内 $F(\lambda, \varphi)$ 可表示为

$$F(\lambda, \varphi) = \sum_{n=0}^M \bar{F}_n P_n(\mu) + \sum_{\hat{m}=-BM}^{BM} \sum_{n=|\hat{m}|}^{BM} F_n^{\hat{m}} \exp[i\hat{m}(\lambda - \lambda_1)] P_n^{\hat{m}}(\mu) \quad (10)$$

其中 $B = 2\pi / (\lambda_2 - \lambda_1)$ 。 计算时采用 FFT^[4] 及数值模式中常用的计算方法^[5]。 初始场 F_i^0 , (i 表示纬向格点数, j 表示经向格点数) 为 1989 年 9 月 22 日 12 时(世界时)北半球 500hPa 高度场资料并对称地扩展到南半球。 沿经圈的高斯截点数 J 固定为 32, 沿纬圈取 64 个点 ($\Delta\lambda = D = 5.625^\circ$), 或加密一倍 ($\Delta\lambda = D/2$)、三倍 ($\Delta\lambda = D/4$)。 计算范围分别取为全球和 4 种有限区域, 具体如下:

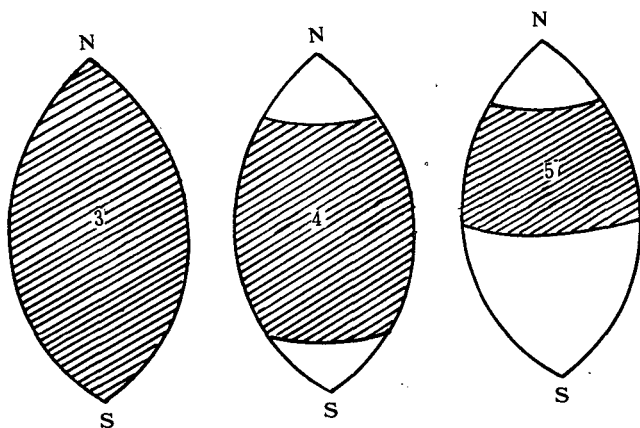


图 2 计算区域

(1)全球范围。(2) $\varphi=90^{\circ}\text{S}-90^{\circ}\text{N}$, $\lambda=5^{\circ}\text{E}-5^{\circ}\text{W}^{\circ}$ 。(3) $\varphi=90^{\circ}\text{S}-90^{\circ}\text{N}$, $\lambda=55^{\circ}-145^{\circ}\text{E}$ 。
 (4) $\varphi=65^{\circ}\text{S}-65^{\circ}\text{N}$, $\lambda=55^{\circ}-145^{\circ}\text{E}$ 。(5) $\varphi=0^{\circ}-65^{\circ}\text{N}$, $\lambda=55^{\circ}-145^{\circ}\text{E}$ 。后三种计算区域
 (3—5)如图 2 所示。其中第(5)种最接近于我们主要的预报区域(设为北半球内的有限范围)。区域(4)和(5)南北边界的处理是采用对计算范围外侧到极地部分(图 2 中空白处)的 F^m 值作线性插值;然后代入式中进行计算的。

2. 结果分析

选取不同的计算区域和纬向格距,算出球谐展开以后 500hPa 高度场误差的均方根,以及绝对误差的最大值、最小值和它们各自的相对值。对区域(4)和(5),上述统计不包括南、北边界各两行的值。主要结果如下:

1. 对上述 5 种计算范围,当纬向格点数为 64,截断波数 $M=32$ 时,谱展的均方根误差都在 5 位势米(相对误差 0.08%)以下,绝对误差的最大值都在 22 位势米(0.4%)以下(见表 1)。由此说明,我们的计算方案是可行的。

2. 在本例中,有限区域的均方根误差比全球范围的相应值要小 2—3 位势米,绝对误差小 8—18 位势米(见表 1)。这是由于对同样的纬向格点数 L ,计算范围愈小,则纬向格距 $\Delta\lambda$ 也愈小,即有限区域内的格距较小。这可以从表 1 中的第二列看出。另一方面,在我们所选取的初始资料中,美洲大槽的槽底锋区最强。两相邻高斯纬圈的最大高度差在有限区域内为 19 位势米,在全球范围内为 25 位势米。这说明高度场在有限区域内的分布相对比较均匀。

表 1 球谐展开的误差

计算区域	纬向格距	均方根误差		最大误差		最小误差	
		(gpm)	(%)	(gpm)	(%)	(gpm)	(%)
1	D	4.6	0.08	21.5	0.41	-17.3	-0.33
2	$D/2$	2.2	0.04	13.4	0.23	-8.2	-0.14
3	$D/4$	1.4	0.03	5.0	0.10	-4.6	-0.08
4	$D/4$	0.9	0.02	3.2	0.06	-4.1	-0.07
5	$D/4$	1.8	0.03	5.3	0.09	-5.5	-0.10

3. 当计算范围和截点数固定时,不同的叠加波数 M 导致不同的谱展误差。对于本文中的具体情况,数值计算表明,当 $M=32$ 时的误差明显地小于其他 $M \neq L/2$ 的情况。这与调和分析的基本原理是一致的。当然,这是用球谐方法拟合已有资料时波数和格点之间的最好关系。在实际预报业务中,为了抑制非线性不稳定等因素,取 $M \leq \frac{1}{3}(L-1)$ 为佳。

以上分析表明,对气象要素进行有限区域的球谐展开时,其效果的好坏取决于截断波数、截点数、格距以及被展要素在该区域内的分布。只有在各因素搭配得当时,才能使谱展误差最小。对不同的叠加波数,当 $M=L/2$ 时误差最小。这种情况下,对我们所选取的 5 种不同区域,计算 500hPa 高度场谱展的均方根误差均小于 5 位势米。当格距较小且要素的空间分布较为均匀时,谱展误差也较小。上述数值计算的结果表明,我们所用的有限区域球谐展开的方法是可行的。

参 考 文 献

- [1] Tatsumi. Y. ,A spectral limited-area model with time-dependent lateral boundary conditions and its application to a multi-level primitive equation model, *J. Met. Soc. ,Japan*, 64,637—663,1986.
- [2] Liao Dongxian, A spectral nested regional shallow water equation model, *Adv. Atmos. Sci.* , 6,393—402,1989.
- [3] 廖洞贤,两种在有限区域内进行 2-维谱展开的方法,应用气象学报,1,337—343,1990.
- [4] E. O. 布赖姆,快速富利叶变换,上海科学技术出版社,1984年。
- [5] Machenhauer. B. ,et al. ,Numerical methods used in atmospheric models, I ,GARP,Publication Series,17,WMO. ,1979.

THE ERROR ANALYSIS OF A SPHERICAL HARMONIC EXPANDING IN LIMITED REGIONS

You Xingtian Zhang Dongfeng

(Beijing Meteorological college, Beijing, 100081)

Abstract

The numerical computation of expanding a meteorological element in terms of spherical harmonic functions for five regions is carried out by using 500hPa height observations. The calculated results show that all root-mean-square errors (RMSE) of spherical harmonic expansion are less than 2.5 gpm (0.04%) and the maximums of absolute error are less than 14 gpm (0.23%) for four limited regions with the number of longitudinal grid points $L=64$, while the number of Gauss discrete points in the latitudinal direction is 32 and the wave number $M=L/2=32$. The RMSE of the spherical harmonic expansion for limited areas are 2—3 gpm less than that for the globe. This is principally due to the longitudinal gridlength is shorter for the limited areas than that for the globe.