

三层模式中的对称不稳定*

张立凤 张 铭
(空军气象学院, 南京, 211101)

提 要

用三层模式研究了对称不稳定。结果表明,当气层的厚度(扰动的垂直尺度)与扰动的水平尺度达到最佳配合时,有最大的对称不稳定增长率。而 R_1 数越小,出现最不稳定时所要求的气层厚度与扰动的水平尺度的比就越大。

许多气象工作者研究对称不稳定条件表明,在整个对流层范围内发生对称不稳定是很难的^[1],故而研究某一层次中对称不稳定发生的条件是很有必要的,也很有意义。许多观测事实都表明,中小尺度天气系统多在低层明显,低层的逆温及低空急流为对称不稳定的发生提供了有利的环境条件。本文用一个三层模式来研究对称不稳定问题。

1. 三层模式中对称不稳定的判据

对无粘、绝热的 Boussinesq 方程组线性化后可得以下研究对称不稳定的方程^[1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2S^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + F^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

这里 $S^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = -f \bar{u}_z$, $N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$, \bar{u} 是基本气流且设其是 y 和 z 的线性函数, $F^2 = f(f - \bar{u}_y)$, ψ 为流函数且有 $v = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$, $w = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ 。将正规波解 $\psi(y, z, t) = \Psi(z)e^{i\sigma t + imy}$ 代入式(1)有:

$$(\sigma^2 + F^2) \frac{d^2 \Psi}{dz^2} - 2imS \frac{d\Psi}{dz} - m^2(\sigma^2 + N^2)\Psi = 0 \quad (2)$$

设边界条件为:

$$\Psi(0) = 0, \Psi(H) = 0 \quad (3)$$

H 为扰动所处的气层的厚度,也可认为是该扰动的垂直尺度。通常在平坦地面和逆温层之间以及两个逆温层之间的扰动可以认为满足该边界条件,将方程(2)在图1所示的三层模式上离散化,可得以下两个方程:

1990年10月24日收到,1991年6月26日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助的课题

$$\left[-\frac{2}{\Delta z^2}(\sigma^2 + F^2) - m^2(\sigma^2 + N^2)\right]\Psi_1 + \left[\frac{\sigma^2 + F^2}{\Delta z^2} - \frac{imS^2}{\Delta z}\right]\Psi_2 = 0 \tag{4}$$

$$\left[\frac{\sigma^2 + F^2}{\Delta z^2} + \frac{imS^2}{\Delta z}\right]\Psi_1 + \left[-\frac{2}{\Delta z^2}(\sigma^2 + F^2) - m^2(\sigma^2 + F^2)\right]\Psi_2 = 0 \tag{5}$$

若要 Ψ_1, Ψ_2 有非零解, 其系数行列式须为零, 由此可得存在增长解的判据:

$$\sigma^2 = -\frac{ab\Delta z^2}{a^2 - 1} - F^2 + \frac{\Delta z^2}{a^2 - 1} \cdot \sqrt{b^2 + (a^2 - 1)\left(\frac{mS^2}{\Delta z}\right)^2} > 0 \tag{6}$$

这里 $a = 2 + m^2\Delta z^2, b = m^2(N^2 - F^2)$ 。考虑到 $S^2 = -f\bar{u}_z$ 并引入 Richardson 数 $Ri = N^2/\bar{u}_z^2$, 则式(6)的判据可用 Richardson 数表示, 即:

$$Ri < Ric \triangleq \frac{f^2}{N^2} \cdot \frac{1}{(1 + \xi/\eta)(\eta + 3\xi)} \tag{7}$$

这里 $\xi = F^2/N^2, \eta = m^2\Delta z^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \cdot \left(\frac{H}{3}\right)^2 = 4.3865$

$\left(\frac{H}{L}\right)^2$, 它们是两个无量纲数, η 正比于扰动的垂直尺度(H)与扰动的水平尺度(L)之比的平方。式(7)就是三层模式中对称不稳定的判据。也即是对称不稳定产生的必要条件。由式(7)可见, 对称不稳定能否发生, 不仅取决于环境场的条件(\bar{u}_z, f, N^2, F^2), 还与扰动本身的尺度(η)有关。由式(7)可见:

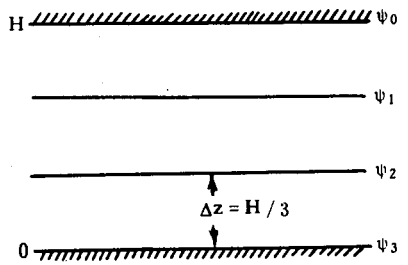


图 1 三层模式示意图

(1) N^2 越小则 Ric 越大, 对称不稳定条件越容易满足, 但值得注意的是在三层模式中当 N^2 趋于零时, 对称不稳定的条件并不是被无限放宽。此时要发生对称不稳定需有: $\bar{u}_z^2 > \frac{3F^4}{\eta f^2}$ 。

(2) 当 $\eta \rightarrow 0$ 或 $\eta \rightarrow \infty$ 时均有 $Ric \rightarrow 0$, 故无对称不稳定发生, 因 η 正比于 $\left(\frac{H}{L}\right)^2$, 这意味着当 H 很小, 或 L 很小, 很大(扰动的水平尺度很小、很大)时均不易发生对称不稳定。

(3) 对固定的 f, N 及 η, ξ 越小, Ric 就越大, 对称不稳定判据越容易满足。因 $\xi = F^2/N^2$, 而 $F = f - \bar{u}_z$, 故当基本气流的水平切变 $\bar{u}_z > 0$ 时, 不稳定判据更易满足。在天气图上急流的右侧有 $\bar{u}_z > 0$, 该处更易出现对称不稳定。

(4) 当 $f \rightarrow 0$ 时有 $Ric \rightarrow 0$, 此时无对称不稳定发生。由此可知低纬(f 很小)不易发生对称不稳定。

2. 不稳定增长率对 η 的选择性

实际大气中, 不同的环境场使得不稳定扰动所处的气层厚度不同。众所周知, 在强对流天气爆发前, 低层往往出现逆温, 它阻止了对流的发生, 使不稳定能量积累起来, 不零星释放^[2]。逆温层顶与平坦地面可以认为满足边界条件(3), 而 H 可看作逆温层顶的高度。此时若有低空急流存在, 则风场会有明显的垂直和水平切变, 就会发生对称不稳定。这样对某一水平尺度的扰动, 在一定的环境场下从式(6)中就可求得发生对称不稳定所要求的最佳逆温层顶的高度。式(6)还可写成无量纲的形式:

$$\sigma^2/N^2 = -(\eta+2)\Phi(\eta)(1-\xi) - \xi + \sqrt{(1-\xi)^2\Phi^2(\eta) + \frac{f^2\Phi(\eta)}{N^2 Ri}} \quad (8)$$

在此 $\Phi(\eta) = \frac{\eta}{(\eta+1)(\eta+3)}$ 。当外参数给定后则增长率就直接依赖于 η 。由 $\Phi(\eta)$ 的表达式易知, 当 $\eta \rightarrow 0$ 时, $\Phi(\eta) \rightarrow 0$, $\sigma^2 \rightarrow -F^2 < 0$; 当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, 同样有 $\Phi(\eta) \rightarrow 0$, 而 $(\eta+2)\Phi(\eta) \rightarrow 1$, 此时有 $\sigma^2 \rightarrow -N^2 < 0$ 。故在这二种极端的情况下, 扰动均是稳定的, 当基流无水平切变时, 其振荡频率分别等于惯性振荡频率和浮力振荡频率(Brunt-Vaisala 频率)。而对不稳定扰动必存在某个 η 值使 σ^2 达到极大值, 即使扰动达到最不稳定。用求极值的办法不难求出该 η 值。

图 2 给出了当取 $N^2 = 7.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$, $F^2 = 1.156 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}$, $f = 0.8 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 时, 对不同的 Ri , η 与 σ^2 之间的依赖曲线。由图可见在 $Ri \geq 0.5$ 的范围内, η 值在 0.0003 附近则 σ^2 值最大, 扰动最不稳定。因此, 在该范围内最不稳定扰动的水平尺度与垂直尺度之比的量级为 $H/L = \sqrt{\eta/4.3865} \approx \sqrt{0.0003/4.3865} \approx 0.01$ 。可以认为, 当逆温层顶较高时, 水平尺度较大的不稳定扰动发展得更快些, 反之, 逆温层顶较低有利于水平尺度较小的不稳定扰动发展。当逆温层顶在 850hPa 附近时则有利于中- β 尺度扰动的不稳定。实际大气中强对流发生前逆温层顶的高度多在 850hPa 附近, 这与本文的结论相吻合。而 Ri 则对最不稳定增长率的大小影响明显, Ri 数越小该增长率越大, 当 Ri 数大于某一临界值 Ric 后, 扰动成为中性传播, 此时 σ^2 恒小于零。

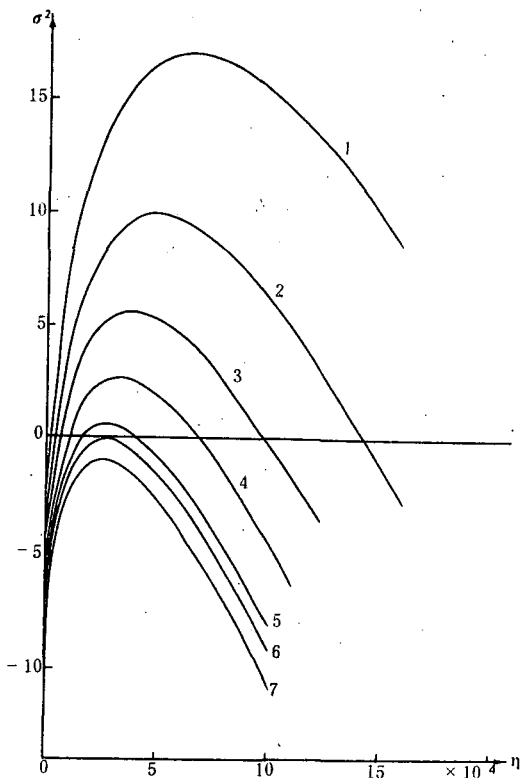


图 2 不同 Ri 时, η 和 σ^2 的关系

(曲线 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 分别为 $Ri = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.7823(Ric), 0.8$ 的情形)

3. 对称不稳定的发生与柯氏参数的关系

图 3 给出了取 $\bar{u}_y = 0.6555 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $N^2 = 7.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$, $\eta = 0.003948, 0.002014, 0.000987, 0.000247$ 时(若 $H = 1.5 \text{ km}$ 则 L 分别等于 50, 70, 100, 200km), Ric 与柯氏参数 f 之间的关系。

由图 3 可见, 在纬度较低的地方水平尺度较大的扰动易得到发展, 而在纬度较高处则水平尺度较小的扰动易于发展。当扰动的垂直尺度(逆温层顶高度) H 为 1.5km 时, 对于水平尺度为 100—200km 的扰动(中- β 尺度的扰动), Ric 的极大值对应的柯氏参数 f 的数值为 $0.7 \times 10^{-4} - 0.8 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, 其相应的纬度为 $30^\circ - 35^\circ \text{ N}$ 。这表明在该处水平尺度为

100—200km 的中- β 尺度扰动最易发生对称不稳定。我国在该纬度的梅雨锋中有时有多条雨带出现,其相距在 200km 左右,这或许就与对称不稳定有关。

最后要指出,在该三层模式中水平尺度很小的扰动是中性传播的,即该模式中的对称不稳定存在短波截断现象。这一点是与纯解析解不同的^[1]。这是因为我们用差分方法对微分方程进行了离散化的缘故。而这等价于在物理上引进了耗散,实际大气也是有耗散的。故该模式在一定程度上反映了实际大气的情况,该模式的结论与纯解析解的结论也并不矛盾。

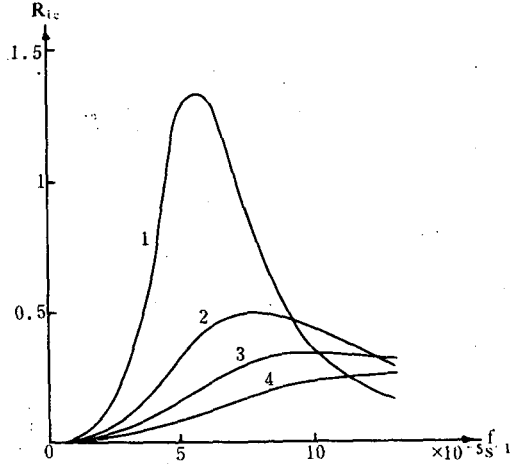


图3 不同 η 时, R_{ic} 与 f 的关系
(曲线 1, 2, 3, 4 分别为 $\eta=0.003948$,
 0.002014 , 0.000987 , 0.000247 的情形)

参 考 文 献

- [1] Zhang Kesu (张可苏), Mesoscale instability of a baroclinic basic flow, Part I, Symmetric instability, *Acta Meteorologica Sinica*, 2, 2, 135—145, 1988.
- [2] 杨国祥, 华东对流性天气的分析预报, 28—30, 气象出版社, 1989 年。

THE SYMMETRIC INSTABILITY IN THREE LAYER MODEL

Zhang Lifeng Zhang Ming

(Air Force Meteorological Institute, Nanjing, 211101)

Abstract

The symmetric instability is studied by means of three layer model. The results show that there exist the greatest growing rate of the instable disturbance when the optimum coupling of air layer depth (i. e. the vertical scale of the disturbance) with its horizontal scale is obtained. However, the smaller Richardson number R_i is, the greater the ratio of the air layer depth to the horizontal scale of the most instable disturbance is.