

Lyapunov 指数预报模式

林振山 南方

(南京大学大气科学系, 南京 210008)

提 要

考虑到系统在吸引子附近的演化行为是指数辐散的, 我们把混沌理论和统计原理相结合, 提出了 Lyapunov 指数预报模式. 个例试验的结果是令人满意的.

关键词: 相空间; Lyapunov 指数; 模式; 预报.

1 引 言

在文献[1—3]里, 我们把混沌理论的一些基本思想和概念与统计原理相结合, 提出了一些长期预报的相空间线性模式, 并对它们进行了一些试验, 结果是比较令人满意的. 然而, 我们知道系统内部非线性相互作用是混沌系统的主要特征, 要在相空间^[1]里描写混沌系统的演化行为, 必须建立非线性模式. 另一方面, 任一不稳定的运动轨道, 在局部看来总是指数分离的. 而 Lyapunov 指数不仅刻划了耗散系统在相空间中相体积收缩、膨胀过程中的几何特征变化, 还表征了系统在 Δt 时刻内信息的变化. 所以, 我们认为 Lyapunov 指数是个很好的、可用于预报的物理指标.

2 Lyapunov 指数预报模式

2.1 Lyapunov 指数的计算

这里结合本人的经验给出 Wolf^[4]计算最大 Lyapunov 指数的方法:

(1) 根据时间序列 $\{x(t_i), i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ 重构 m 维 ($m \geq 3, 4, \dots$) 高维嵌入相空间及描述相应的相轨道的(相)点集 $\{X(t_i), i = 0, 1, 2, \dots, N; N = n - (m - 1)\tau\}$ 的相型

$$\begin{array}{cccc} x(t_0) & x(t_1) & \dots x(t_i) & \dots x(t_N) \\ x(t_0 + \tau) & x(t_1 + \tau) & \dots x(t_i + \tau) & \dots x(t_N + \tau) \\ x(t_0 + 2\tau) & x(t_1 + 2\tau) & \dots x(t_i + 2\tau) & \dots x(t_N + 2\tau) \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{cccc}
 x(t_0 + (m-1)\tau) & x(t_1 + (m-1)\tau) & \cdots x(t_i + (m-1)\tau) & \cdots x(t_N + (m-1)\tau) \\
 X(t_0) & X(t_1) & \cdots X(t_i) & \cdots X(t_N)
 \end{array}$$

式(1)中的 $X(t_i)$ 为相点,共有 m 个分量: $x(t_i), x(t_i + \tau), \cdots, x(t_i + (m-1)\tau)$, 而 τ 为延滞时间. 它的选择不是任意的, 而应使 $\{X(t_i)\}$ 的 m 个分量(对应于式(1)的 m 行)间的相关性最小(理论上应使其相关性为零).

(2) 如图 1 所示, 在延拓的 m 维相空间里, 取初始相点 $X(t_0)$ 为参考点, 根据下式:

$$L_{nbx} = \text{MIN}_{i \neq j} (\| X_i - X_j \|) \tag{2}$$

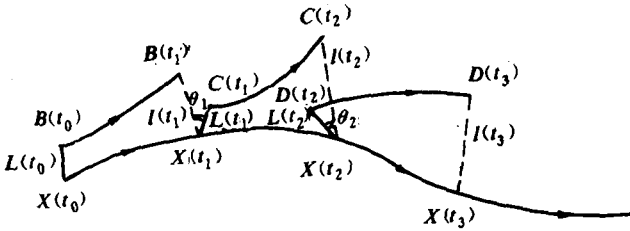


图 1 相轨线辐散示意图

可求得 $X(t_1)$ 的最近邻点 $B(t_0)$. 这里的 MIN 为取最小函数, $\| \|$ 表示模, 而 L_{nbx} 表示在欧几里得意义上的最短距离. 记 $L_{nbx} = L(t_0)$. 设在 $t_1 = t_0 + k\Delta t$ 时, $X(t_0), B(t_0)$ 分别演化到 $X(t_1), B(t_1)$, 其距离为 $l(t_1)$. 如用 λ_1 表示在此时间内 (k 值较小) 线段的指数增长率, 则

$$l(t_1) = L(t_0) 2^{\lambda_1 k} \tag{3}$$

即:
$$\lambda_1 = \frac{1}{k} \log_2 \frac{l(t_1)}{L(t_0)} \tag{4}$$

这里已取时间序列的时间间隔 $\Delta t = 1$ (单位).

(3) 如图 1 所示, 在 $X(t_1)$ 的若干个最近邻点中找出一个满足 θ_1 角很小的近邻点 $C(t_1)$ (如无法满足 θ_1 很小, 则仍用 $B(t_1)$). 设在时间 $t_2 = t_1 + k\Delta t = t_0 + 2k$ 时, $X(t_1), C(t_1)$ 分别发展为 $X(t_2)$ 和 $C(t_2)$, 且其距离为 $l(t_2)$, 则

$$\lambda_2 = \frac{1}{k} \log_2 \frac{l(t_2)}{L(t_1)} \tag{5}$$

将上述过程一直进行到点集 $\{X(t_i)\}$ 的终点, 而后取指数增长率的 λ_N 的平均值为最大 Lyapunov 指数的估计值, 即

$$LE_1(m) = \frac{1}{N'} \sum_i \frac{1}{k} \log_2 \frac{l(t_i)}{L(t_{i-1})} \tag{6}$$

其中 $N' = [N/k]$ 为发展的总步数, k 为步长.

(4) 增加嵌入空间的维数 m , 重复式(2—3)的步骤, 直到指数的估计值 $LE_1(m_c)$ 保持平稳为止 (即不再随 m 而发生有意义的变化). 记 $LE_1(m_c) = LE_1$, 便是所谓的最大

Lyapunov 指数. 而 m_c 为嵌入空间的饱和维数.

与计算 $LE_1(m)$ 类似, 我们可以利用相空间面积增长速率来计算二维 Lyapunov 指数的估计值:

$$LE_1(m) + LE_2(m) = \frac{1}{N'} \sum_i \frac{1}{k} \log_2 \frac{s'(t_i)}{S'(t_i - 1)} \quad (7)$$

这里的 s', S' 均为相面积.

同理, 可用相体积的增长速率来计算三维 Lyapunov 指数的估计值:

$$LE_1(m) + LE_2(m) + LE_3(m) = \frac{1}{N'} \sum_i \frac{1}{k} \log_2 \frac{v'(t_i)}{V'(t_i - 1)} \quad (8)$$

为了得到一个好的最大 Lyapunov 指数的估计值, 必须要求所给定的时间序列有足够长的长度. Wolf 认为该长度的估计范围为 $10^{D_2} \sim 30^{D_2}$ 个. 其中 D_2 是吸引子的维数. 对月平均尺度的时间序列(如温度、气压、降水)而言, 所需资料个数的量级为 10^3 (或更多).

2.2 基本假设

(1) 增加或减小时间序列的极其有限的长度, 将不会使系统的关联维 D_2 (分数维)和最大 Lyapunov 指数发生变化.

(2) 给定时间序列的结构, 在预报区域内不变.

2.3 长期预报的一维 Lyapunov 指数模式

按文献[1-3]所介绍的方法, 利用时间序列 $\{X(t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ 重建 d 维($d = \text{INT}(D_2 + l), l = 1, 2, \dots$) 相空间, 并得到如式(9)所示的排列和相点序列

$$\begin{array}{cccc} \{Y(t_j), & j = 1 + (d-1)\tau, & 2 + (d-1)\tau, & \dots, n\} \\ x(t_n) & x(t_{n-1}) & \dots & x(t_1 + (d-1)\tau) \\ x(t_n - \tau) & x(t_{n-1} - \tau) & \dots & x(t_1 + (d-2)\tau) \\ x(t_n - 2\tau) & x(t_{n-1} - 2\tau) & \dots & x(t_1 + (d-3)\tau) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(t_n - (d-1)\tau) & x(t_{n-1} - (d-1)\tau) & \dots & x(t_1) \\ Y(t_n) & Y(t_{n-1}) & \vdots & Y(t_1 + (d-1)\tau) \end{array} \quad (9)$$

这里的 INT 为取整函数. 注意式(9)与式(1)的不同在于式(9)采用了倒序方法来重建 d 维(d 远比 m 小)相空间. $Y(t_n)$ 即为预报参考相点, 而 t_n 为参考时刻.

图 1 中, 若假设在不同步长的发展过程中, $l(t_i)/L(t_i - 1)$ 近似为一常值, 则

$$LE_1(m) \approx \frac{1}{k} \log_2 \frac{l(t_i)}{L(t_i - 1)} \quad (10)$$

注意到 $LE_1(m_c)$ 是系统真实的最大 Lyapunov 指数, 是表征系统演化行为的一个宏观统计量. 而 $LE_1(m)$ 是为逼近(计算) $LE_1(m_c)$ 的一个非系统真实的物理量, 且 λ_1 是个“微观”量. 因此我们有理由用 $LE_1(m_c)$ 来近似代替式(10)中的 $LE_1(m)$, 从而有

$$\frac{1}{k} \log_2 \frac{L(t_i)}{L(t_i - 1)} \approx LE_1(m_c) \quad (11)$$

设参考态 $Y(t_n)$ 的最近邻态为 $Y_{n\alpha}(t_i)$, 经演化时间 $k\Delta t = k$ 后演化为 $Y_{n\alpha}(t_i + k)$, 而我们的预报对象则是 $Y(t_n + k)$. 根据式(11), 有:

$$2^{LE_1(m_c)k} \approx \frac{\|Y(t_n + k) - Y_{n\alpha}(t_i + k)\|}{\|Y(t_n) - Y_{n\alpha}(t_i)\|} \quad (12)$$

当 $k = \tau$ 时, 式(12) 只有 $Y(t_n + k)$ 的第一分量 $x(t_n + k)$ 为未知量, 即我们的预报对象. 式(12) 就是我们所提出的一维 Lyapunov 指数模式.

比较文献[3]提出的相空间近邻等距模式:

$$\|Y(t_n) - Y_{n\alpha}(t_i)\| = \|Y(t_n + T) - Y_{n\alpha}(t_i + T)\| \quad (13)$$

(这里的 T 为提前预报时间) 可知式(13) 是式(12) 的一个近似. 即当 $LE_1(m_c) = 0, k = T = \tau$ 时, 式(12) 就退化为式(13).

式(12) 较式(13) 的长处之处在于式(12) 已考虑了由于系统内部非线性作用所导致的轨道指数辐散这一显著特点. 此外, 由于 $k \geq T = 1\Delta t$, 故式(12) 所能提前预报的期限原则上要比式(13) 的长.

同理, 我们可以建立以下的二维 Lyapunov 指数模式和三维的 Lyapunov 指数模式:

$$S(t_n + k) 2^{(LE_1(m_c) + LE_2(m_c))k} = s(t_n) \quad (14)$$

$$V(t_n + k) 2^{(LE_1(m_c) + LE_2(m_c) + LE_3(m_c))k} = v(t_n) \quad (15)$$

3 应用和检验及其说明

3.1 应用和检验

利用 1873 年 1 月—1988 年 12 月的广州月平均气温时间序列, 我们求得 $LE_1(m_c)$ ($m_c = 12, \tau = 4\Delta t$) = 0.041, $D_2(m_0) = 2.3$ ($m_0 = 20, \tau = 5\Delta t$). 表 1 是根据 1951 年 1 月—1988 年 12 月的广州平均气温时间序列, 利用一维 Lyapunov 指数模式的一些随机抽样预报的结果. 结果表明平均距平符号报准率为 75%, 平均相对误差为 35%, 平均绝对误差为 0.83°C.

3.2 应用说明

(1) 从时间序列提取分数维 D_2 (实际是关联维) 的方法可参见文献[5] 或文献[1]. (2) 计算 D_2 所需时间序列的长度约为 $10^{D_2} - 10^{2D_2+1}$; 计算 $LE_1(m_c)$ 需资料 $10^{D_2} - 30^{D_2}$ 个; 而实际作预报时, 所需的资料下限为 300 个^[6]. (3) 计算 $D_2(m_0)$ 和 $LE_1(m_c)$ 所需的饱和嵌入维数 m_0 和 m_c 彼此不同, 且均比作预报时的嵌入相空间维数 $d = \text{INT}(D_2 + l)$ ($l = 1, 2, \dots$) 要大得多. (4) 在计算 D_2, LE_1 时, 原则上要事先选择好 τ , 以使得各分量间的相关性最小; 而作预报时, τ 的取值可由调模的结果来决定, 亦可事先选好 (使各分量的相关性最小). (5) 预报时, 可以不事先求 D_2 , 而 d 从 3 开始向上取值. 究竟取多少可由调模的结

表 1 一维 Lyapunov 指数模式的随机抽样预报结果

d	τ	$T=k$	t_n	实际 $x(t_n+T)$ 及距平 (°C)	预测 $x(t_n+T)$ 及距平 (°C)	d	τ	$T=k$	t_n	实际 $x(t_n+T)$ 及距平 (°C)	预测 $x(t_n+T)$ 及距平 (°C)
3	1	1	1985 年 12 月	14.4(+1.2)	15.1(+1.9)	5	1	1	1985 年 7 月	28.8(+0.6)	28.9(+0.7)
3	1	1	1985 年 7 月	28.8(+0.6)	28.4(+0.2)	5	2	2	1985 年 7 月	26.4(-0.6)	27.0(0)
3	2	2	1985 年 7 月	26.4(-0.6)	25.9(-1.1)	5	1	1	1985 年 6 月	28.0(-0.5)	27.6(-0.9)
4	1	1	1985 年 7 月	28.8(+0.6)	26.3(-1.9)	5	2	2	1985 年 6 月	28.8(+0.6)	27.9(-0.3)
4	2	2	1985 年 7 月	26.4(-0.6)	26.7(-0.3)	5	1	1	1985 年 2 月	14.8(-3.0)	16.8(-0.9)
4	3	3	1985 年 7 月	25.2(+1.6)	26.0(+2.4)						

果而定。所谓调模指的是:事先留取最新的现有的几十个资料(数据)作为检验。通过不断改变 d (和 τ)的值,使得某一(组) d (或 d 和 τ)的值有最好的预报(试验)值(效果)。而实际预报时,就以这一(组) d (或 d 和 τ)的值为依据,并不再留取任何现有的资料。(6)有关的预报误差估计参见文献[6]。(7)计算 $LE_1(m_c)$ 的程序参见文献[4]。

致谢:北京大学刘式达先生对本文的撰写,提出不少有益的见解和意见,谨此致谢。

参 考 文 献

- 1 林振山. 长期预报的相空间相似法. 应用气象学报, 1991, 2(4): 440—444.
- 2 林振山. 一种长期预报的距平符号法——相空间符号传播相似模式. 高原气象, 1991, 10(3): 241—247.
- 3 林振山. 长期预报的相空间近邻等距法. 大气科学, 1992, 16(5): 530—537.
- 4 Wolf A. & J. Swift. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica*, 1985, 1 6D: 285—317.
- 5 Grassberger P. & I. Procaccia. Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.* 1983, 50: 346—349.
- 6 林振山. 相空间模式的误差估计. 数学物理学报, 1992, 12: 163—164.

LYAPUNOV ESPONENT MODEL FOR FORECAST

Lin Zhenshan Nan Fang

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjiang University,
Nanjing 210008)

Abstract

Considering the systemic exponential divergent behaviour appearing nearby the attractor, the theory about chaos is combined with statistics, and then the Lyapunov exponent forecasting model is presented in the paper. The results of case tests show that the practical model is satisfactory.

Key words: Phase space; Lyapunov exponent; Model; Forecast.