第5卷 第2期 应用气象学报 Vol.5,№2
1994年5月 QUARTERLY JOURNAL OF APPLIED METEOROLOGY May 1994

在均匀经纬度网格中计算高纬纬向差商的问题

廖洞贤
(国家气象中心,北京 100081)

提　　要

针对在高纬地区计算纬向差商时,常须把时间步长取得很小,或采取 Fourier 滤波的问题,提出了可以避免这些困难的差分格式.这种格式可以根据任何给定的、稳定的差分格式构造.在形式上它和后者相同,但要求调整网格距,使之可以取和中纬地区同样大的时间步长,并满足计算稳定性条件.在计算中它很有用,也很方便,几乎没有额外的运算量.而且,如果所根据的格式具有质量或能量守恒性质,新格式也同样具有.

关键词:纬向有限差商;高纬地区;质量或能量守恒.

1　问题的提出

在均匀经纬度网格中,由于高纬地区纬向网格距过细,导致所取时间步长很小、计算量大增的问题,是差分模式中尚未完全解决的一个问题.过去,曾提出过两类办法解决这个问题:一是用变时间步长的方法,使时间步长随纬度而变,只在高纬地区采用小步长[1];二是时间步长仍按中纬地区的网格距选取,但采用 Fourier 滤波,使所有不满足线性计算稳定性判据的短波均通过 FFT 而被滤去[2].这两类办法所花费的 CPU 时间都较大,而后者还会带来能量或质量减少的问题.看来,寻求另外的方法是很必要的.

2　高纬地区纬向差商的计算

设某一纬向差分格式:

$$\frac{1}{a\cos\varphi_j}LA_{ij}$$

具有1次或2次守恒性质,即

$$① \quad \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=0}^{I} A_{ij} = -\sum_{i=0}^{I}\frac{1}{a\cos\varphi_j}L\,A_{ij} = 0 \tag{1}$$

1992年8月27日收到,1993年1月19日收到修改稿.

或

$$② \quad \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=0}^{I}\frac{1}{2}A_{ij}^{2} = -\sum_{i=0}^{I}\frac{A_{ij}}{a\cos\varphi_j}L\,A_{ij} = 0 \tag{2}$$

其中 L 表示和某一微分算子相容的差分算子，$\sum_{i=0}^{I}$ 表示沿纬圈 φ_j 求和，$I+1$ 是纬圈上的总的网格点数，A 是任一物理量. 如果我们用 $n\Delta\lambda(n=1,2\cdots)$ 代替 $\Delta\lambda$，记这样表示的差分算子为 L_n，并用它代替 L，而求和意义仍保持不变. 比如，取

$$LA_{ij} = \frac{1}{2}[\overline{(uA)}_{\lambda}^{\lambda} + u\,\overline{A}_{\lambda}^{\lambda}]$$

则

$$L_nA_{ij}=\frac{1}{2}[\overline{(uA)}_{n\lambda}^{n\lambda}+u\,\overline{A}_{n\lambda}^{n\lambda}]$$

其中

$$\overline{A}^{n\lambda} = \frac{1}{2}\left[A(\lambda+\frac{n\Delta\lambda}{2},\varphi) + A(\lambda-\frac{n\Delta\lambda}{2},\varphi)\right]$$

$$A_{n\lambda} = \frac{1}{n\Delta\lambda}\left[A(\lambda+\frac{n\Delta\lambda}{2},\varphi) - A\,(\lambda-\frac{n\Delta\lambda}{2},\varphi)\right]$$

由于 LA_{ij} 和 L_nA_{ij} 在形式上是一样的，求和项数相同，二者总的计算量也相同.

3　L_nA_{ij} 的守恒性质

如 $I+1$ 能为 n 所整除，且 LA_{ij} 具有性质①，因为差分格式的守恒性质与 $\Delta\lambda$ 的大小无关，在以 $n\Delta\lambda$ 构造的网格中，总有

$$\sum_{i_k'} L_nA_{i_k'j} = 0 \tag{3}$$

其中 $i'_k=i_k+ln, n\neq1, l=0,1,\cdots(I-1)/n; i_k=k, k=0,1,\cdots n-1$. 于是，

$$\sum_{i'_k=0}^{I}L_nA_{i_k'j} = (\sum_{i'_0} + \sum_{i'_1} + \cdots + \sum_{i'_{n-1}})L_nA_{i_k'j} = 0$$

同样，如果 LA_{ij} 具有性质 ②，则必有

$$\sum_{i_k'} A_{i_k'j}L_nA_{i_k'j} = 0 \tag{5}$$

于是

$$\sum_{i=0}^{I}A_{ij}L_nA_{ij} = (\sum_{i'_0} + \sum_{i'_1} + \cdots + \sum_{i'_{n-1}})A_{i_k'j}L_nA_{i_k'j} = 0 \tag{6}$$

式(4)和式(6)表明：用 $n\Delta\lambda$ 代替 $\Delta\lambda$ 计算同样的纬向守恒格式，而求和意义不变，仍可以保持原格式的守恒性质.

4　n 的选取

考虑截断误差和网格距有关，而在同一场内，截断误差在各处相近，对场的光滑性和减少寄生波有好处. 我们不妨以 $a\cos\varphi_j\cdot n\Delta\lambda$ 和 $a\Delta\lambda$ 相近，并考虑计算的方便作为 n 的标

准.这样,如纬圈点数为 $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$,则 n 的取值如表 1 所示.

表 1　球面网格高纬度地区 n 的选取

φ(°)	60—71	71—76	76—79	79—81	81—83	83—85	85—87	87—88	>88
n	2	3	4	5	6	8	10	15	20

按照线性计算稳定性判据,如果令

$$\Delta t_1 = \frac{a\cos\varphi_j \cdot \Delta\lambda}{c}$$

$$\Delta t_2 = \frac{a\cos\varphi_j \cdot n\Delta\lambda}{c}$$

则取

$$\Delta t \leqslant \Delta t_2 = n\Delta t_1$$

并用上面的差分格式即可保证计算稳定.这里 c 表示波速.于是,在大于纬度 60° 的地区,时间步长平均可以增加 3—4 倍,而计算量却几乎未变,经济效益是明显的.

5 讨　　论

根据上面的讨论,我们可以得到如下初步结论:

(1) 对于任一守恒格式,如用 $n\Delta\lambda$ 代替 $\Delta\lambda$,其构造的格式仍可保持原格式的守恒性质.

(2) 对于用 $n\Delta\lambda$ 构造的格式,可以增大时间步长 $n-1$ 倍(相对于用 $\Delta\lambda$ 构造的格式),而计算量几乎不变.

(3)在高纬地区用全球差分模式积分,不需采用变时间步长,只需以中低纬度为准,选一时间步长即可;也不需要用 Fourier 滤波.

但是,在采用时间积分方案或计算时,用上面的格式有时还会遇到困难.比如,用半隐式格式解 Helmholtz 型方程和在具有不同 n 值的交界地区进行计算的情形.对于前者可以采用显式格式,或分解显式格式代替;对于后者可以采用空间平滑作适当处理.当然,这些还只是可能,还需要通过实践检验.

另外,也许有人要问,用 $n\Delta\lambda$ 代替 $\Delta\lambda$ 会使截断误差增加,而采取变时间步长,在保持高纬度计算精度上要好一些.我们知道,计算误差是通过方程总的截断误差和其在全场的分布,而不仅是通过单项的截断误差施加影响的.就这个意义来说,高纬地区的分辨率是太高了,是不必要的,也是超过观测网的分辨率的.如果我们取 $dx = a\cos\varphi d\lambda, dy = ad\varphi$,则 $\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial A}{\partial\lambda}$ 和 $\frac{1}{a}\frac{\partial A}{\partial\varphi}$ 可以表示为 $\partial A/\partial x$ 和 $\partial A/\partial y$.这时如用中央差分,则

$$\frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2\Delta x} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\Delta x^2 + \cdots$$

$$\frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2\Delta y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial y^3}\Delta y^2 + \cdots$$

如果 $\partial^3 A/\partial x^3 = \partial^3 A/\partial y^3$,则上二式中右端的截断误差各取决于 Δx^2 和 Δy^2 的大小.当用 $n\Delta\lambda$ 代替 $\Delta\lambda$ 时,如 $\Delta\lambda = \Delta\varphi$,则只要 $n^2 \leqslant \frac{1}{\cos^2\varphi}$,则 $\Delta x \leqslant \Delta y$,即纬向截断误差不大于经向

截断误差. 在 $\varphi \geqslant 60°$ 的地区，表 1 中所取的 n 是满足上式的. 如果方程中同时有纬向差商，又有经向差商，则方程的总截断误差主要由经向截断误差所决定. 所以，就量级来说，方程的总的截断误差并未增加；而用 $n\Delta\lambda$ 代替 $\Delta\lambda$ 只会使纬向和经向截断误差更接近，更和中低纬度的计算精度协调.

参考文献

1 Grimmer M. and D. B. Shaw. Energy-preserving integration of the primitive equations on the sphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1967, **93**: 337—349.

2 Holloway J. L. Jr., M. J. Speplman and S. Manabe. Latitude-longitude grid suitable for numerical time integration of a globle atmosphere model. *Mon. Wea. Rev.*, 1973, **101**:69—78.

COMPUTATION OF THE FINITE DIFFERENCE QUOTIENT IN LONGITUDE ON A UNIFORM LONGITUDE-LATITUDE GRID IN HIGH-LATITUDES

Liao Dongxian

(*National Meteorological Center*, *Beijing* 100081)

Abstract

In consideration of small time step or Fourier filtering having to be taken in the integration of the grid model in high-latitudes due to the convergence of the grid points near the poles, a difference scheme has been presented, which can avoid such difficulties mentioned above. The scheme can be constructed on the basis of any given finite difference scheme. It is the same as the latter in form, but requires that the grid-length used should be adjusted so as to let the time step to be as large as the one used in mid-latitudes and the computational stability criterion to be satisfied. In computation it is convenient and there is nearly no extra operational amount. Furthermore, if the original scheme is mass-or-energy-conserving, the new scheme also has such a property.

Key words: Finite difference quotient in longitude; High-latitudes; Mass-or-energy-conserving.