第5卷 第2期　　应用气象学报　　Vol.5,№2
1994年5月　　QUARTERLY JOURNAL OF APPLIED METEOROLOGY　　May 1994

自回归模型的最优定阶及其在长期预报中的应用

胡基福　姜宏川
（青岛海洋大学海洋气象系，青岛 266003）

周庆满　洪　光
（青岛市气象局，青岛 266003）

提　要

对自回归模型的5种定阶方法（FPE、AIC、BIC、L_1和L_2准则）作了概述，并应用上述方法对青岛月平均温度序列进行了自回归模型定阶试验. 结果指出，FPE、AIC和L_1准则选择自回归模型的阶数较高，L_2准则选择自回归的阶数为中等，BIC准则确定的阶数最低. 文章还提出了一个应用自回归模型递推预报月平均温度的方法，预报实践证明，由BIC准则产生的低阶自回归模型的效果优于其它方法.

关键词：自回归模型；最优定阶；递推预报；月平均温度.

1 引　言

在时间序列的分析与预报中，最广泛应用的线性回归模型是自回归模型，称为$AR(p)$模型. p是自回归模型的阶数，阶数过低，容易漏掉当前项与前期各项相关的信息，影响模型的精度；阶数过高，模型的精度固然能提高，但是计算量大，而且会增加模型的不稳定性. 因此，在建立自回归模型时，确定模型的适当阶数是十分重要的. 这也是一个较难解决的理论问题与实践问题. 早在1969年，Akaike首先提出了"最终预报误差"的定阶方法，称为FPE准则[1]. 1974年他又提出了一种"信息定阶准则"，称为AIC准则[2]. Schwarz（1978年）提出了"贝叶斯定阶准则"，称为BIC准则[3]. 80年代Carr又发展了两种新的定阶标准，称为L_1和L_2准则[4,5]. 这两种方法不仅可用于选择自回归的阶数. 而且可用于确定多元线性回归方程中预报因子的最优个数. 上述方法已广泛应用于$AR(p)$、$MA(q)$和$ARMA(p,q)$等线性模型的建模中[6—9]. 但是，究竟哪种方法确定的阶数最适当，而且预报效果好？至今尚无人系统地试验过. 为了解决这个问题，本文利用上述的定阶方法对青岛92年（1898—1989年）的月平均气温序列进行了自回归模拟定阶试验. 根据最优定阶结果建立自回归预报方程，分别递推预报了1990年和1991年1—12月的平均气温，并与实况作了比较. 最后，对五种方法的定阶结果进行了讨论.

* 1992年10月20日收到，12月22日收到修改稿.

2 几种最优定阶方法

设时间序列 $x_1,x_2\cdots x_n$ 为零均值平稳时间序列,则在 t 时刻的值 x_t 依前 p 项 x_{t-1},$x_{t-2}\cdots x_{t-p}$ 的 $AR(p)$ 模型应为

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \cdots + \varphi_p x_{t-p} + a_t \tag{1}$$

式中 a_t 是一组均值为零、方差为 $\sigma_a{}^2$ 的正态随机变量,称为白噪声. $\varphi_1,\varphi_2\cdots\varphi_p$ 称为 $AR(p)$ 模型的自回归系数. 如何确定 $AR(p)$ 模型的最优阶数 p 是建模中首先要解决的问题. 目前国内外常用的最优定阶方法有五种:

(1) FPE 定阶准则

$$FPE(k) = \frac{n+k+1}{n(n-k-1)}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \hat{x}_t(k))^2 \tag{2}$$

或写成

$$FPE(k) = \frac{n+k+1}{n-k-1}\sigma^2(k) \tag{3}$$

式中

$$\sigma^2(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \hat{x}_t(k))^2 \qquad (k = 1,2,\cdots m) \tag{4}$$

其中 n 为时间序列的总长度,k 为试验阶数,m 为最大后延相关长度(一般 $m = n/4$—$n/10$),$\sigma^2(k)$ 为 k 阶自回归模型的剩余方差,$\hat{x}_t(k)$ 为 k 阶自回归对 x_t 的估计值. FPE 的意义是,当把确定的自回归模型应用到该序列的一个独立现实时,其预报误差的期望值称为"最终预报误差". 从式(2) 中知道,$\sigma^2(k)$ 将随 k 的增大而减小,同时$(n+k)/(n-k)$ 又将随 k 的增大而增大,当 k 增大到超过某一值(p) 后,$\sigma^2(k)$ 值开始缓慢减小,这时 $(n+k)/(n-k)$ 对 FPE 增大起主要作用,此时的 p 值便可确定为最优阶数. 在实际计算中,应使 $FPE(k)$ 满足最小值的原则,即

$$FPE(p) = \min\{FPE(k)\} \qquad (1 \leqslant k \leqslant m) \tag{5}$$

此时,$p = k$ 便可确定为自回归模型的最优阶数.

(2) AIC 定阶准则

$$AIC(k) = \ln\sigma^2(k) + 2k/n \qquad (k = 1,2,\cdots m) \tag{6}$$

AIC 中符号的意义与 FPE 相同.

(3) BIC 定阶准则

$$BIC(k) = n\ln\hat{\sigma}^2(k) + (k+1)\ln n \tag{7}$$

式中

$$\hat{\sigma}^2(k) = \frac{1}{n-k-1}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \hat{x}_t(k))^2 = \frac{n}{n-k-1}\sigma^2(k) \tag{8}$$

$(k = 1,2,\cdots m)$

式(7) 右端第一项是对 $AR(k)$ 模型拟合程度的度量. 第 2 项是对需估计的$(k+1)$ 个参数$(\mu,\varphi_1,\varphi_2,\cdots\varphi_k)$ 起限制作用,以控制其选择的阶数不要过高(μ 为时间序列的数学期望).

(4) L_1 定阶准则

$$L_1(k)=\frac{n-1}{(n-k-1)(n-k-2)}\sum_{t=1}^{n}(x_t-\hat{x}_t(k))^2 \tag{9}$$

或写成

$$L_1(k)=\frac{n(n-1)}{(n-k-1)(n-k-2)}\sigma^2(k) \qquad (k=1,2,\cdots m) \tag{10}$$

(5) L_2 定阶准则

$$L_2(k)=\frac{n(n-1)}{(n-k-1)^2(n-k-2)}\sum_{t=1}^{n}(x_t-\hat{x}_t(k))^2 \tag{11}$$

或写成

$$L_2(k)=\frac{n^2(n-1)}{(n-k-1)^2(n-k-2)}\sigma^2(k) \qquad (k=1,2,\cdots m) \tag{12}$$

L_1 与 L_2 间的区别是,L_1 用有偏估计公式$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t-\hat{x}_t(k))^2$,而 L_2 则使用无偏估计公式$\frac{1}{n-k-1}\sum_{t=1}^{n}(x_t-\hat{x}_t(k))^2$. 但是,当 $\frac{k}{n}$ 很小时,L_1 可简化为$\frac{n}{(n-k-1)}\sum_{t=1}^{n}(x_t-\hat{x}_t(k))^2$,而 L_2 则可简化为$\frac{n^2}{(n-k-1)^3}\sum_{t=1}^{n}(x_t-\hat{x}_t(k))^2$. 这时,$L_1$ 与 L_2 可视为相似[5].

AIC、BIC、L_1 和 L_2 准则确定最优阶数的原则,也是满足式(5) 最小值的原则.

3 定阶试验结果与讨论

采用上述方法,对青岛 92 年逐月平均气温序列($n=12\times 92=1104$)进行自回归模拟定阶试验. 由于原时间序列有年变化,影响序列的平稳性. 因此,在进行定阶试验之前先对序列进行差分处理和标准化处理,然后分别对差分和标准化两序列,在最大后延相关长度 $m=100,150,200$(月)的情况下进行定阶试验,两种序列的定阶结果列于表 1.

表 1 5 种准则的定阶结果

处理方法	后延长度	阶数 (p)				
		FPE	AIC	BIC	L_1	L_2
差分法	100	86	86	25	86	72
	150	86	86	25	86	72
	200	169	169	25	86	72
标准化	100	5	5	3	5	5
	150	5	5	3	5	5
	200	5	5	3	5	5

表 2 各月序列的定阶结果($m=30$)

	月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
定阶准则	FPE	1	2	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1
	AIC	1	2	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1
	BIC	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	L_1	1	2	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1
	L_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

由表1可见，对于同一资料用两种不同处理方法所得到的时间序列，其自回归模拟的定阶结果是不同的. 差分序列所确定的阶数明显地高于标准化序列. 这表明标准化序列不仅能消除年循环变化，而且能削弱序列的长周期振动. 但是差分序列仅能消除年循环变化，而对序列的长周期振动却不能起到削弱的作用. 因此，差分序列的相关函数的滞后长度明显地比标准化序列长，差分序列自回归模型的阶数必然明显高于标准化的阶数. 但是，两种序列都以 BIC 准则选择的阶数最低. 同时 BIC 确定的阶数不随 m 的增大而变化，其最优阶数始终集中在一个阶数上，这与 Hannan(1980年) 的试验结果是一致的[9]. 此外，还可以看出，对于差分序列，FPE、AIC 和 L_1 的定阶结果基本上是相同的. 而对于标准化序列，除 BIC 以外，其它四种方法的定阶结果完全相同.

为了进一步比较，我们又把月平均温度序列按同月逐年排列（以下称为各月序列），组成长度均为 $n = 92$(月) 的12个时间序列. 由于这些序列没有固有的周期变化，因此，可视为近似平稳序列. 当 $m = 30$(月) 时，5种方法所得到的定阶结果列于表2. 可见，对于各月序列5种方法的定阶结果，除2月和4月的 FPE、AIC 和 L_1 以外，其余月份的阶数都是1阶，这反映了 FPE、AIC 和 L_1 3种方法的一致性. 大部分月份是1阶自回归模型，这说明各月序列是遵从马尔柯夫链过程，即今年仅与去年有关，而与前年无关.

4 预报试验

本文的目的是选择适当的阶数和最佳拟合时间序列，而且能用于预报. 下面将采用这些定阶结果，建立自回归预报方程，并进行预报检验.

在实际长期预报中，往往希望能一次作出未来多时刻的预报. 我们采用自回归模型的递推预报方法来达到这个目的. 递推预报方程可写成

$$\left.\begin{array}{l}\hat{x}_{t+1} = \varphi_1 x_t + \varphi_2 x_{t-1} + \cdots + \varphi_p x_{t-p+1} \\ \hat{x}_{t+2} = \varphi_1 \hat{x}_{t+1} + \varphi_2 x_t + \cdots + \varphi_p x_{t-p+2} \\ \quad\vdots \\ \hat{x}_{t+s} = \varphi_1 \hat{x}_{t+s-1} + \varphi_2 x_{t+s-2} + \cdots + \varphi_p x_{t+s-p}\end{array}\right\} \quad (s < p) \tag{13}$$

$\hat{x}_{t+g}$ 表示 x_{t+g} 的递推预报值 $(g = 1,2,\cdots s)$，s 为递推预报的最大项数（这里 $s = 12$ 个月）. 由式(13)可知，递推预报值 $\hat{x}_{t+g}$ 仅与 $(t + g)$ 时刻以前 p 个时刻的值有关. 因此，当阶数 p 确定后，在递推预报过程中，自回归系数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_p$ 是不变的，这是 $AR(p)$ 模型递推预报的特点. 为了能一次作出1—12月的预报，必须满足 $s < p$，才能保证递推预报的精度.

由于差分序列选择的阶数较标准化序列高，因此我们可利用差分序列进行自回归模拟和预报. 给定最大后延相关长度 $m = 150$(月)，采用上述5种方法分别对青岛1898—1989年和1898—1990年月平均气温的差分序列进行了定阶建模，并分别递推预报了1990年和1991年1—12月的平均气温，表3给出模拟定阶结果与预报结果. 由表3可见，每个序列都有高、中、低3个阶数. 1898—1989年差分序列的自回归模拟结果，3个阶数分别为86、72、和25. 因此用 $AR(86)$、$AR(72)$和 $AR(25)$ 3种自回归模型递推预报了1990年1—12月气温，预报与实况的距平符号绝大部分是一致的. 3种模型的预报结果

表 3 青岛各月平均气温自回归模型预报结果(距平,单位:℃)

年份	定阶准则	阶数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	平均距平	预报与实况误差
1990			实况	-0.39	1.50	2.32	0.48	-0.05	0.28	0.50	0.85	0.59	1.04	2.85	1.20	1.00	
	BIC	25	预报	1.17	1.26	0.57	0.43	0.36	-0.02	0.04	0.09	0.42	0.99	-0.26	1.00	0.55	0.45
	L_2	72	预报	0.71	0.43	0.32	0.21	0.41	-0.06	-0.07	0.31	0.37	0.48	0.29	0.36	0.33	0.67
	FPE、*AIC*、L_1	86	预报	0.66	0.43	0.33	0.07	0.64	-0.18	0.18	0.25	0.08	0.64	0.25	0.34	0.34	0.66
1991			实况	1.63	1.38	0.30	0.18	-0.25	0.37	0.40	-0.06	0.59	0.33	0.62	0.78	0.62	
	BIC	25	预报	1.15	1.43	1.87	1.45	0.43	0.21	0.43	0.12	0.59	0.49	0.94	0.95	0.84	0.22
	L_2	85	预报	1.23	0.72	0.47	0.71	-0.02	-0.13	0.25	-0.18	0.29	0.19	0.89	0.53	0.47	0.15
	FPE、*AIC*、L_1	133	预报	0.51	0.59	0.45	0.37	0.32	0.03	0.83	-0.38	0.11	0.13	0.71	0.48	0.43	0.19

注:平均距平、预报与实况误差均为绝对值.

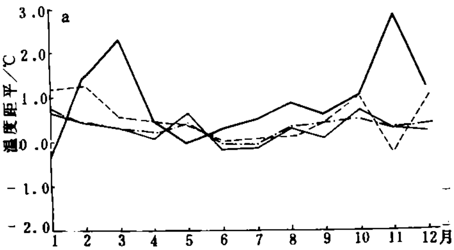

图 1 1990 年月平均温度距平预报与实况比较(粗实线:实况,虚线:*AR*(25) 模型预报距平,点划线:*AR*(72) 模型的预报距平,细实线:*AR*(86) 模型预报距平)

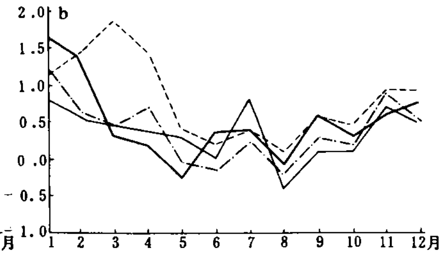

图 2 1991 年月平均温度距平预报与实况比较(粗实线:实况,虚线:*AR*(25) 模型预报距平,点划线:*AR*(85) 模型预报距平,细实线:*AR*(133) 模型预报距平)

与实况之间的平均距平(绝对值,下同)误差分别为 0.66℃,0.67℃ 和 0.45℃. 1898—1990 年序列的高、中、低阶数分别为 133,85,和 25. 用 *AR*(133)、*AR*(85)和 *AR*(25)模型对 1991 年 1—12 月气温的预报与实况比较,平均距平误差分别为 0.19℃、0.15℃ 和 0.22℃. 比较二年的高、中、低阶模型的预报与实况,平均距平误差分别为 0.43℃、0.41℃ 和 0.34℃,都小于 0.5℃. 3 种模型预报结果比较以 *BIC* 准则确定的低阶自回归模型精度较高,这说明自回归阶数高,预报精度并不一定高.

为了比较预报与实况的年度趋势,根据表 3 资料,绘制了 1990 年与 1991 年 1—12 月的预报与实况年变化曲线(图 1 与图 2). 由图可见,二年的预报与实况(气温距平)基本一致. 但是,应该注意到 1990 年的 3 月与 11 月的预报与实况差异较大,3 月平均气温实况正距平高达 2.32℃,11 月平均气温实况正距平高达 2.85℃. 实际上,1990 年青岛出现了明显的暖春和暖秋现象. 这说明过渡季节容易产生气温异常现象,像这样的气温异常便破坏了月平均气温序列的平稳性,因此预报效果较差. 由于回归方程只能预报平均情况,不能预报极值的出现,这是回归方程的弊病. 所以,对于过渡季节月平均气温的预报,还须在了解它们的概率分布特征的情况下,进一步研究其异常变化规律,然后在自回归预报的基

础上加以订正,方能作出较正确的预报.

5 结　　语

应用 5 种自回归最优定阶准则模拟青岛月平均气温序列,并进行预报试验,得出如下结果:

(1)同一资料不同的预处理方法,5 种定阶准则的定阶结果显著不同.差分序列自回归的最优阶数明显地高于标准化序列和各月序列.

(2)FPE,AIC 和 L_1 准则是选择高阶数的自回归模型,L_2 准则是选择中等阶数的自回归模型,BIC 准则是选择低阶数的自回归模型.同一序列,其阶数不随最大后延相关长度 m 的变化而改变.

(3)利用高、中、低阶 3 种自回归模型,对青岛月平均气温的试报结果表明,预报与实况平均距平误差均小于 0.5℃,由 BIC 准则所确定的低阶自回归模型的精度优于其它方法.

参 考 文 献

1 Akaike H. Fitting autoregressive models for prediction. *Ann. Inst.*, *Stat. Math.*, 1969,**21**:243—247.

2 Akaike H. A new look at the statistical model identification. IEEE Trans. *Auto. Control*, 1974, AC-19: 716—723.

3 Schwarz G. Estimating the dimension of a model. *Ann. Statistics*, 1978, **6**: 461—464

4 Carr M. B. On determining the number of predictions in a regression equation used for prediction. Coorperative Thesis No. 59, Florida State University and National Center for Atmospheric Research. 1980, 261pp.

5 Carr M. B. Determining the order of an autogressive model. Preprints, 7th Conf. Probability and statistics in Atmospheric Sciences, Monterey Amer. Meteor. Soc., 1981, 174—176.

6 Richard W. K. Statistical evaluation of climate experiments with General Circulation Models: A parameteric time series modeling approach. *J. Atmos. Sci.*, 1982, **39**: 1446—1455.

7 Barbara G. B. Time series models to simulate and forecast wind speed and wind power. *J. Cli. and App. Meteor.*, 1984, **23**: 1184—1195.

8 C. S. Yao. Fitting a linear autoregressive model for long-range forecasting. *Mon. Wea. Rew.*, 1983, **111**: 692—700.

9 Hannan E. J. The estimation of the order of an ARMA process. *Ann. Statistics*, 1980,**8**:1071—1081.

10 Carr M. B. Determining the optimum number of predictions for a linear prediction equation. *Mon. Wea. Rev.*, 1988, **116**: 1623—1640.

DETERMINING OPTIMUM ORDER OF AUTOREGRESSIVE MODEL AND THE APPLICATION TO LONG-RANGE FORECAST

Hu Jifu Jiang Hongchuan

(*Qingdao Ocean University, Qingdao* 266003)

Zhou Qingman Hong Guang

(*Qingdao Meteorological Bureau, Qingdao* 266003)

Abstract

The methods of determining the optimum order of autoregressive (*AR*) models, such as *FPE*, *AIC*, *BIC*, L_1 and L_2 were summarized and tested by using the monthly mean temperature data in Qingdao. The selected orders of the *AR* model by use of the *FPE*, *AIC* and L_1 criteria are the highest, medium by L_2 and the lowest by *BIC*, respectively. Additionally, a recurrence method of *AR* model was suggested to forecast the monthly mean temperatures in Qingdao. It has been proved by the forecast practice that the low order *AR* model from the *BIC* criterion is more efficient.

Key words: Autoregressive model; Determining the optimum order; Recurrence forecast; Monthly mean temperature.