

考虑 β 随纬度变化下的 Rossby 孤立波 与偶极子阻塞*

罗德海

(成都气象学院, 成都 610041)

提 要

利用文献[4]得到的推广的 β 平面近似式为 $f = f_0 + \beta_0 y - \frac{\delta_0}{2} y^2$, 研究由 δ_0 项所引起的一类 Rossby 孤立波, 而不考虑基流切变和地形等因子的作用. 经过计算可以发现, 当经向波数为 1 时, 这种孤立波具有显著的南低北高的偶极子阻塞结构, 它主要存在于弱西风气流中, 并且偶极子的能量随着纬度的增高更容易集中(即高纬偶极子结构趋于局地化), 因而, β 随纬度的变化可能是中高纬度地区偶极子阻塞产生的原因之一.

关键词: β 因子; Rossby 孤立波; 偶极子阻塞.

1 引 言

大气中的偶极子阻塞已引起了人们的极大兴趣, 人们提出了不少理论, 如 McWilliams(1980)^[1]用 equivalent modon 理论解释了大气中所观测到的南低北高的偶极子阻塞. 但后来人们发现这种理论有局限性, 它只能解释一类西移的偶极子阻塞, 而不能解释准静止的偶极子阻塞. 随后 Verkey(1987)^[2]把 Modon 理论推广到了球面大气, 并获得了定常 Modon, 但这种定常 Modon 的强度在经向方向上是对称的. 1984 年 Malguzzi 和 Malanotte-Rizzoli^[3]考虑了急流状的基本气流, 研究了 β 平面近似下的定常 Rossby 孤立波, 获得了与实际大气中偶极子阻塞相似的结构, 但这种结果不能解释弱西风中的偶极子阻塞. 另外以前人们对 Rossby 孤立波进行研究时都考虑了基流存在切变的情况, 对于基流无切变的情况, 是否也存在 Rossby 孤立波, 这个问题是值得研究的. 最近, 刘式适和谭本旭(1992)^[4]指出在中高纬度地区, δ_0 项很重要, 对于经向尺度很大的波尤其如此. 从天气图上很容易发现阻塞系统的经向尺度很大, 因此考虑 δ_0 项的作用是必要的. 本文主要研究了由 δ_0 项引起的 Rossby 孤立波, 并讨论了其特点及其与偶极子阻塞的相似性.

* 国家自然科学基金资助的课题.

1993-02-10 收到, 1994-09-05 收到再改稿.

2 考虑 β 变化下的正压模式与 KDV 方程

按文献[4],对于自由大气,考虑 β 随纬度变化下的正压无辐散的涡度方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + (\beta_0 - \delta_0 y) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其中 $\beta_0 = \frac{2\omega}{a} \cos \varphi_0$, $\delta_0 = \frac{2\omega}{a^2} \sin \varphi_0$, δ_0 为 β 随纬度的变化. 其它为常用符号. 引入无量纲量为

$$(x, y) = L(x^*, y^*), \psi = UL\psi^*, t = \frac{L}{U}t^* \quad (2)$$

其中 U, L 分别为水平方向上的特征速度和长度尺度,带有“*”的量为无量纲量. 将式(2)代入方程(1)进行无量纲化并省略“*”则有

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + (\beta - \delta y) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

其中 $\beta = \frac{L^2}{U} \beta_0$, $\delta = \frac{L^3}{U} \delta_0$. 对于大尺度运动,一般有 $U = 10\text{m/s}$, $L = 10^6\text{m}$,若取 $\varphi_0 = 45^\circ\text{N}$,这时 $\beta = 1.62$, $\delta = 0.254$. 由于偶极子阻塞在北侧存在一个闭合高压而南侧存在一个闭合低压,因而偶极子阻塞在经向方向上跨度很大. 从我们的观测研究可以发现偶极子阻塞在经向方向上的跨度一般在 28 个经度以上^[5], Egger(1978)^[6]的动力学研究也得到偶极子阻塞在经向方向上的跨度,至少在 3000km 以上. 因此,我们取 $y = l_y = 3(l_y$ 为 β 通道的宽度)只能算作是偶极子阻塞最小的经向尺度. 若取 $y = 3$,这时 $\delta y = 0.762$,可见 δy 项相对于 β 项来说不能忽略. 若在高纬度地区, δ 就会变得更大,因而考虑 δ 项的作用是必要的. 为了突出 δ 项的作用,这里不考虑基流切变的作用. 令 $\psi = -\bar{u}y + \psi'$, 于是方程(3)可变为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi' + J(\psi', \nabla^2 \psi') + (\beta - \delta y) \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

其中 \bar{u} 为均匀的基本西风风速. 使用长波近似,我们可引入下列缓变坐标

$$\tau = \varepsilon^{\frac{3}{2}}t, \xi = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(x - ct) \quad (5)$$

将式(5)代入方程(4),并有边界条件为

$$\psi' |_{y=y_1} = \psi' |_{y=y_2} = 0 \quad (6)$$

将 ψ' 按

$$\psi' = \varepsilon \psi_1(t, \tau, \xi, y) + \varepsilon^2 \psi_2(t, \tau, \xi, y) + \dots \quad (7)$$

展开,则可得

$$o(\varepsilon^{\frac{3}{2}}): (\bar{u} - c) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + (\beta - \delta y) \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = 0 \quad (8)$$

$$o(\varepsilon^{\frac{5}{2}}): (\bar{u} - c) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) + (\beta - \delta y) \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + (\bar{u} - c) \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \xi^3} \right\} \quad (9)$$

其边界条件为

$$y = y_1, y_2 \text{ 时, } \psi_1 = \psi_2 = 0 \quad (10)$$

设方程(8)的解为

$$\psi_1 = \varphi(y)A(\tau, \xi) \quad (11)$$

把式(11)代入方程(8),并结合边界条件有

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{\beta - \delta y}{u - c}\varphi = 0 \\ \varphi(y_1) = \varphi(y_2) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

将式(11)和(12)代入方程(9),并设 $\beta - \delta y > 0$,在这种情况下,方程的两边同乘以 $-\frac{u-c}{\beta-\delta y}\varphi$,然后在区间 $[y_1, y_2]$ 上进行积分可得

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} - RA \frac{\partial A}{\partial \xi} - S \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = 0 \quad (13)$$

$$\text{其中 } R = \frac{I_1}{I}, S = \frac{I_2}{I}, I_1 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\delta}{u-c} \varphi^2 dy, I_2 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{(\bar{u}-c)^2}{\beta-\delta y} \varphi^2 dy$$

方程(13)就是著名的 KDV 方程,若不考虑 β 随纬度的变化,则 $\delta = 0$,这时 KDV 方程就不存在,但若考虑基流切变,这时 KDV 方程也能存在,这说明 β 随纬度的变化是激发 Rossby 孤立波的原因之一。

3 本征值问题

令 $k^2 = \frac{\beta}{u-c}, H = \frac{\delta}{u-c}$,并且 $y^* = k^2 - Hy$,于是方程(12)可变为

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dy^2} + H^{-2}y^*\varphi = 0 \\ \varphi(y_1^*) = \varphi(y_2^*) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

其通解为

$$\varphi = y^{*\frac{1}{2}} [c_1 J_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3H}y^{*\frac{3}{2}}) + c_2 Y_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3H}y^{*\frac{3}{2}})] \quad (15)$$

其中 c_1, c_2 分别为两个任意常数, $J_{\frac{1}{3}}, Y_{\frac{1}{3}}$ 分别为 $\frac{1}{3}$ 阶第一类和第二类 Bessel 函数. 由于 $\frac{2}{3H}y^{*\frac{3}{2}}$ 比较大,因此我们不妨将 $J_{\frac{1}{3}}, Y_{\frac{1}{3}}$ 渐近展开,于是式(15)可变为

$$\varphi = (\frac{1}{y^*})^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{3H}{\pi}} [c_1 \cos(\frac{2}{3H}y^{*\frac{3}{2}} - \frac{5}{12}\pi) + c_2 \sin(\frac{2}{3H}y^{*\frac{3}{2}} - \frac{5}{12}\pi)] \quad (16)$$

利用边界条件即

$$\sin[\frac{2}{3H}(y_1^{*\frac{3}{2}} - y_2^{*\frac{3}{2}})] = 0 \quad (17)$$

由此可得

$$\frac{2}{3H}(y_1^{*\frac{3}{2}} - y_2^{*\frac{3}{2}}) = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (18)$$

于是可得式(14)的本征值为

$$c = \bar{u} - \frac{[\beta^{\frac{3}{2}} - (\beta - \delta y_2)^{\frac{3}{2}}]^2}{(3n\pi\delta/2)^2} \quad (19)$$

其中取 $y_1 = 0, y_2 = l_y \neq 0$. 将式(16) 结合边界条件有

$$\frac{c_1}{c_2} = - \operatorname{tg}\left(\frac{2}{3H}y_1^{*\frac{3}{2}} - \frac{5}{12}\pi\right) \quad (20)$$

再把上式代入方程(16) 进行归一化有

$$\left(\frac{1}{y_{\max}^*}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{3H}{\pi}} \left| c_1 \frac{\sin \frac{2}{3H}(y_1^{*\frac{3}{2}} - y_{\max}^{*\frac{3}{2}})}{\sin \frac{2}{3H}(y_1^{*\frac{3}{2}} - \frac{5}{12}\pi)} \right| = 1 \quad (21)$$

其中 $y_{\max}^{*\frac{3}{2}} = y_1^{*\frac{3}{2}} - 3H\pi, y_{\max}^*$ 为 $\varphi(y^*)$ 的最大值点, 因此我们可确定 c_1 和 c_2 分别为

$$\begin{cases} c_1 = \pm \sqrt{\frac{\pi}{3H}} y_{\max}^{*\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3H}y_1^{*\frac{3}{2}} - \frac{5}{12}\pi\right) \\ c_2 = \pm \sqrt{\frac{\pi}{3H}} y_{\max}^{*\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2}{3H}y_1^{*\frac{3}{2}} - \frac{5}{12}\pi\right) \end{cases} \quad (22)$$

把式(22) 代入式(15), 我们可得方程(14) 的本征函数为

$$\varphi(y^*) = \pm \left(\frac{y_{\max}^*}{y}\right)^{\frac{1}{4}} \sin\left[\frac{2}{3H}(y_1^{*\frac{3}{2}} - y^{*\frac{3}{2}})\right] \quad (23)$$

取 $\varphi(y^*)$ 的负号函数, 并将式(23) 代入方程(13) 式的系数中, 再取 $y_1 = 0, y_2 = l_y = 3, n = 2$, 然后进行数值积分可得 KDV 方程的系数 R 和 S 如下表:

表 1 不同纬度 KDV 方程系数

Table 1 KDV coefficient of the equation for differential latitudes

φ_0	R	S
45°N	0.115	0.066
55°N	0.292	0.047
60°N	0.492	0.038

从表中可以看出, 随着纬度的增加, KDV 方程中非线性项的系数 R 逐渐增大, 而频散项 S 逐渐减小, 可见随着纬度的增加, Rossby 孤立波的能量越容易集中, 从而高纬有利于阻塞系统的形成.

4 观测事实

图 1 是 1954 年 6 月 13~17 日发生在亚洲东部地区的一次偶极子阻塞过程, 在这个偶极子阻塞的上、下游地区主要盛行平直西风气流, 它是一个比较典型的偶极子阻塞.

周晓平(1957)^[5]曾对这种偶极子阻塞进行过统计研究, 指出夏季这种偶极子阻塞产生的频率也比较高, 但他只研究了夏季的情况. 最近我们的研究表明冬季的偶极子阻塞多于夏季, 这可能与局地西风的强度和外源强迫有关. Malguzzi 和 Malanotte-Rizzoli(1984)

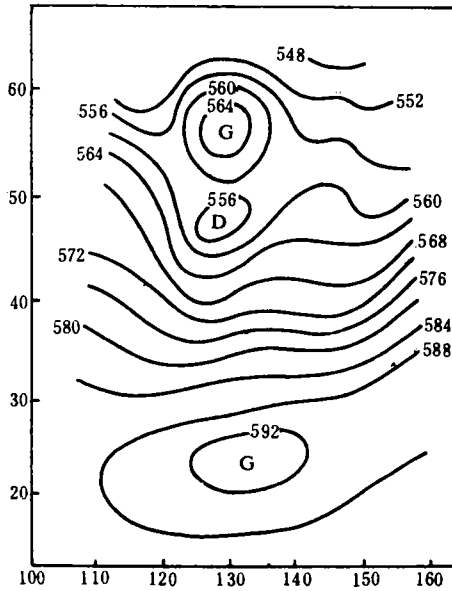


图 1 1954年6月13~17日500hPa平均位势高度图

Fig. 1 Mean 500hPa geopotential height on June 13~17, 1954

考虑了基本气流具有急流流状的结构, 试图用定常 Rossby 孤立波来解释偶极子阻塞, 但不能解释偶极子阻塞主要产生在弱西风气流中。

5 计算结果

对于方程(13), 令 $X = x - ct$, $M = \epsilon A$, 于是方程(13) 可变为

$$M_t - RM \frac{\partial M}{\partial X} - S \frac{\partial^2 M}{\partial X^2} = 0 \quad (24)$$

从方程(24) 和式(11) 可得由 β 变化所产生的 Rossby 孤立波的流函数为

$$\psi = -\bar{u}y + \psi' = -\bar{u}y + M_0 \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{R}{12S}} M_0 (x - C_A t) \right] \varphi(y^*) \quad (25)$$

其中 M_0 为 M 在 $(t, X) = (0, 0)$ 处的值, 并且 $C_A = c - \frac{M_0 R}{3}$, $\varphi(y^*)$ 取负号函数。由式(25) 可得 Rossby 孤立波的波速为

$$C_A = \bar{u} - \frac{[\beta^{\frac{3}{2}} - (\beta - \delta y_2)^{\frac{3}{2}}]^2}{(3n\pi\delta)^2} - \frac{M_0 R}{3} \quad (26)$$

从式(26) 中可以看出, 当 $C_A = 0$ 时, Rossby 孤立波就变为定常孤立波。对于相同的波振幅 M_0 , $n = 1$ 的定常 Rossby 孤立波所要求的基本西风风速比 $n = 2$ 的定常 Rossby 孤立波所要求的基本西风强。 $n = 1$ 的孤立波一般对应于局地阻塞高压或切断低压, 而 $n = 2$ 的定常 Rossby 孤立波对应于偶极子阻塞, 因此对于相同强度的局地阻塞, 存在偶极子阻塞时所要求的基本西风比存在阻高时所要求的基本西风弱, 亦即偶极子阻塞主要存在于弱西风

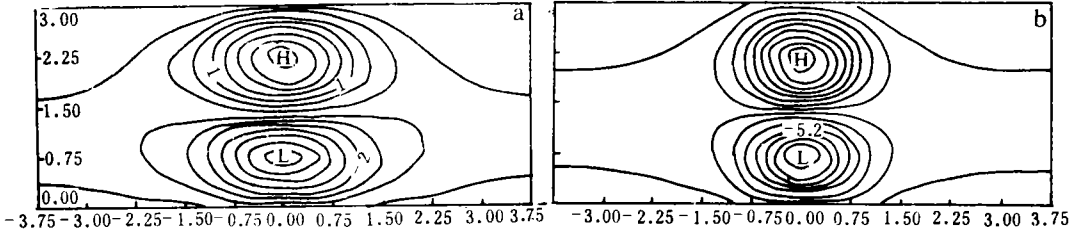


图 2 45°N 处定常 Rossby 孤立波的流场 ($y_1 = 0, y_2 = l_y = 3, \varphi_0 = 45^\circ\text{N}$) (a) $\bar{u} = 0.5, \Delta\psi = 0.6$; (b) $\bar{u} = 0.8, \Delta\psi = 1.2$

Fig. 2 The flow field of stationary Rossby isolated wave over 45°N ($y_1 = 0, y_2 = l_y = 3, \varphi_0 = 45^\circ\text{N}$) (a) $\bar{u} = 0.5, \Delta\psi = 0.6$; (b) $\bar{u} = 0.8, \Delta\psi = 1.2$

气流中。下面的计算结果将证实，在弱西风气流中可以产生显著的偶极子阻塞。

取 $y_1 = 0, y_2 = l_y = 3, n = 2, \varphi_0 = 45^\circ\text{N}$ ，对于定常 Rossby 孤立波 (即 $C_A = 0$)，在 $\bar{u} = 0.5, 0.8$ 的情况下，定常 Rossby 孤立波的流场如图 2 所示。

从图 2a 可以看出，当基本西风 $\bar{u} = 0.5\text{m/s}$ 时，定常 Rossby 孤立波呈南低北高的偶极子结构，它是由 β 随纬度的变化及非线性作用产生的，这个偶极子阻塞的能量主要集中在 $|x| = 1.5$ 这个地区。若增加基本西风的强度，如取 $\bar{u} = 0.8$ 时，所形成的偶极子阻塞的能量更集中了，而且强度也增强了，它主要集中在 $|x| = 1.115$ 这个地区，如图 2(b) 所示。可见随着基本西风的增强，偶极子阻塞的强度也要增强，并且纬向跨度要减小，但基本西风不能无限地增加，若基本西风很强时，偶极子阻塞的强度也要减弱。取 $\varphi_0 = 55^\circ\text{N}$ ，而其他参数不变，这时定常 Rossby 孤立波的流场如图 3 所示。

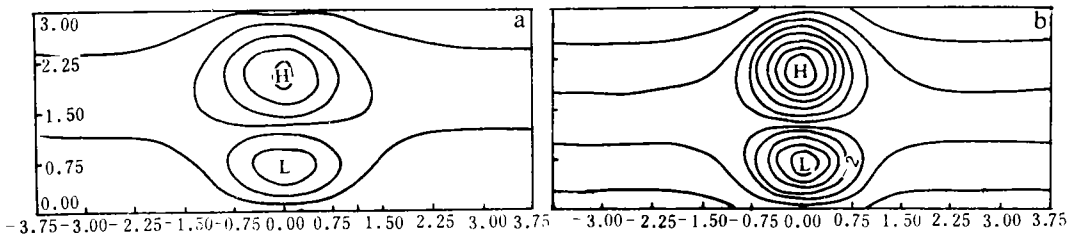


图 3 55°N 处定常 Rossby 孤立波的流场 ($y_1 = 0, y_2 = 3, \varphi_0 = 55^\circ\text{N}, n = 2$) (a) $\bar{u} = 0.5, \Delta\psi = 0.6$; (b) $\bar{u} = 0.8, \Delta\psi = 0.6$

Fig. 3 As in Fig. 2, but for 55°N ($y_1 = 0, y_2 = 3, \varphi_0 = 55^\circ\text{N}, n = 2$) (a) $\bar{u} = 0.5, \Delta\psi = 0.6$; (b) $\bar{u} = 0.8, \Delta\psi = 0.6$

显然，在相同的条件下，55°N 与 45°N 地区的偶极子结构有一定的差别。对于基本西风为 $\bar{u} = 0.5$ 的定常 Rossby 孤立波，55°N 偶极子结构的强度比 45°N 处弱一些，但它的能量更集中了，与实际大气中的偶极子阻塞比较接近，与图 1 相比较可以看出这一点。对于基本西风为 $\bar{u} = 0.8$ 的情况，其偶极子结构的强度也增强了，且能量更集中了，如图 3b 所示，然而图 3b 中的偶极子结构比图 2b 弱一些，但它更接近于实际情况。取 $\varphi_0 = 60^\circ\text{N}$ ，在 $\bar{u} = 0.8, 1.0$ 的情况下，定常 Rossby 孤立波的流场如图 4 所示。

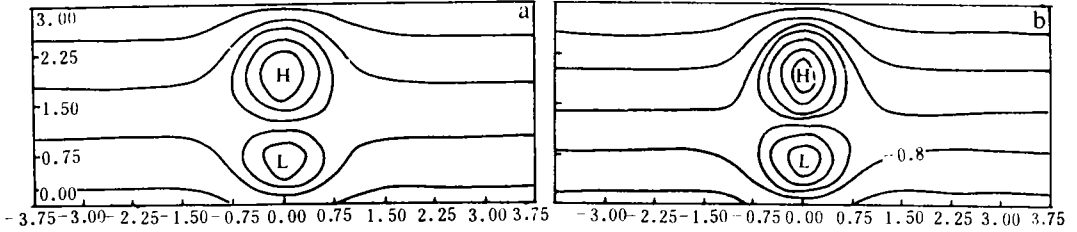


图4 60°N处定常 Rossby 孤立波的流场 ($y_1=0, y_2=3, \varphi_0=60^\circ N, n=2$) (a) $\bar{u}=0.8, \Delta\psi=0.6$ (b) $\bar{u}=1.0, \Delta\psi=0.6$

Fig. 4 As in Fig. 2, but for 60°N ($y_1=0, y_2=3, \varphi_0=60^\circ N, n=2$) (a) $\bar{u}=0.8, \Delta\psi=0.6$ (b) $\bar{u}=1.0, \Delta\psi=0.6$

这里给出了基本西风为 8m/s 和 10m/s 的定常 Rossby 孤立波的流场, 在 60°N 地区, 对于基本西风为 5m/s 的情况, 由于偶极子结构太弱, 这里未给出. 从图 4a 与图 3b 相比较可以看出, 对于相同的基本西风, 纬度越高的地区所形成的偶极子结构越弱一些, 但能量更集中一些. 因此高纬度地区要出现较强的偶极子阻塞必须要求基本西风强一些. 在 60°N 地区, 若增大基本西风的强度, 这时偶极子结构也要增强, 如取 $\bar{u}=1.0$ 时, 其偶极子结构如图 4b 所示. 以上计算结果表明在基本西风为 5~10m/s 的情况下, 在中高纬度 (45°~60°N) 地区可以形成典型的偶极子阻塞, 这说明在不太强的基本西风气流里容易形成偶极子阻塞. 在两大洋上主要盛行弱西风气流, 因此在两大洋上产生的偶极子阻塞比较多, 这与我们的观测结果是一致的. 但由于本文未考虑地形和非绝热加热的强迫作用, 因此这里所得到的理论结果不可能与实际情况完全相符, 这是需要研究的.

6 结 论

本文研究了由 β 随纬度变化下所产生的 Rossby 孤立波的偶极子结构, 其主要结论如下:

(1) 在均匀西风气流中, 通过 β 随纬度的变化作用在中高纬度地区可以产生 Rossby 孤立波. 对于经向方向为一个波且本征函数取负号时, Rossby 孤立波具有显著的偶极子阻塞结构.

(2) 偶极子阻塞可以产生在弱西风中, 并且纬度越高, 偶极子阻塞的能量越集中. 在高纬度地区, 要形成显著的偶极子阻塞, 必须要求基本西风大一些.

参 考 文 献

- 1 McWilliams J C. An application of equivalent modon to atmospheric blocking. *Dyn. Atmos. Oceans*, 1980, **5**: 43~66.
- 2 Verkely W T. Stationary, barotropic modons in westerly background flows. *J. Atmos. Sci.*, 1987, **44**: 2382~2398.
- 3 Malguzzi P and Malanotte-Rizzoli P. Nonlinear stationary Rossby waves on nonuniform zonal winds and atmospheric blocking, part I: The analytical theory. *J. Atmos. Sci.*, 1984, **42**: 2620~2628.

- 4 刘式适,谭本植. 考虑 β 变化下的 Rossby 波,应用数学和力学,1992,(1):35~43.
- 5 周晓平. 亚洲中纬度地区阻塞形势的统计研究. 气象学报,1957,28:75~85.
- 6 罗德海,纪立人. 大气中偶极子阻塞的观测研究. 大气科学,1991,15:52~57.

SOLITARY ROSSBY WAVES WITH THE BETA PARAMETER AND DIPOLE BLOCKING

Luo Dehai

(Chengdu Institute of Meteorology, Chengdu 610041)

Abstract

Using a generalized beta-plane approximation obtained in the reference[4], i. e. $f = f_0 + \beta_0 y - (\delta_0/2)y^2$, a kind of the solitary Rossby waves excited by the δ_0 term excluding effects of shearing basic flow and topography et al is mainly investigated. The computational results show that the obtained solitary Rossby wave with meridional wavenumber 1 has a dipole structure with a high pressure in the north and a low in the south, which mainly exists in the weak westerly wind. On the other hand, the energy of dipole easily accumulates with the latitude. Thus, the beta parameter with the change of latitude may be one reason of producing dipole blocking in the mid-high latitudes.

Key words: Beta factor; Solitary Rossby wave; Dipole blocking.