

# CISK 影响下的线性和非线性惯性重力波

王永中 夏友龙

(北京气象学院大气科学系, 北京 100081)

## 提 要

利用板对称的大气动力学方程组, 考虑线性和非线性两种 CISK 加热过程, 由行波法和非线性常微分方程定性理论, 讨论了 CISK 影响下的线性和非线性惯性重力波的稳定性, 以及 CISK 对惯性重力孤波强度和宽度的影响. 结果指出, 线性 CISK 既影响孤立波的强度, 又影响孤立波的宽度, 而非线性 CISK 只影响孤立波的强度.

**关键词:** CISK; 惯性重力波; 孤立波; KDV 方程; 非线性.

## 引 言

自 1964 年 Charney 与 Eliassen<sup>[1]</sup>, Ooyama 等<sup>[2]</sup>对第二类条件不稳定作了深入的理论分析以来, 已有很多工作来完善和改进他们的结果. Bates<sup>[3]</sup>提出了广义 CISK 理论, Lindzen<sup>[4]</sup>提出了波动 CISK 理论. 国内学者李崇银<sup>[5,6]</sup>提出了垂直切变中的 CISK 及水平切变对 CISK 的影响. 伍荣生<sup>[7]</sup>在此基础上总结了 CISK 理论中的若干问题. 总的来说, 上面的讨论均限于线性 CISK 理论. 李天明和朱永提<sup>[8]</sup>提出非线性 CISK 以后, 夏友龙和郑祖光<sup>[1]</sup>把这种非线性 CISK 机制用于台风内核的研究, 取得了一些结果. 但线性 CISK 和非线性 CISK 对惯性重力波影响如何? 这两种机制对线性和非线性惯性重力波影响有什么差异尚不清楚. 本文用  $Y-Z$  平面上研究 CISK 问题常用的方程组, 考虑两种 CISK 加热过程和非线性项作用, 讨论这两种加热过程对线性和非线性惯性重力波的影响.

## 1 基本方程组

$Y-Z$  平面 Boussinesq 近似的大气动力学方程组为<sup>[7,9]</sup>

1994-08-09 收到, 1995-10-05 收到修改稿.

1) 夏友龙等, 层结惯性重力波的不稳定和台风强度突变(待发表).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = fv \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + N^2 w = \eta N^2 w_B \end{cases} \quad (1)$$

式(1)为略去撇号的扰动方程组,由于讨论 CISK 加热作用,温度方程中略去了水平平流项, $w_B$ 为边界层顶的垂直速度, $\eta$ 为参数, $N^2 = g \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial z}$ ,其它符号均是气象常用量。

令: $u = U(\theta)$ ,  $v = V(\theta)$ ,  $w = W(\theta)$ ,  $\phi = \Phi(\theta)$

$$\theta = ly + nz - \hat{\omega} t \quad (2)$$

式(2)中  $l, n$  分别为  $y, z$  方向的波数,  $\hat{\omega}$  为惯性重力波的圆频率。

把式(2)代入式(1),则得

$$\begin{cases} -\hat{\omega} \dot{U} = fV - (lV + nW) \dot{U} \\ -\hat{\omega} \dot{V} = -fU - l\dot{\Phi} - (lV + nW) \dot{V} \\ l\dot{V} + n\dot{W} = 0 \\ n(nW - \hat{\omega}) \ddot{\Phi} = N^2(\eta w_B - W) \end{cases} \quad (3)$$

式(3)中,  $\dot{U} = \frac{dU}{d\theta}$ ,  $\dot{V}$ ,  $\dot{W}$  等量与  $\dot{U}$  类似。

对式(3)中的第3式积分,并取积分常数为零,则有:

$$lV + nW = 0 \quad (4)$$

把式(4)代入式(3),得:

$$\begin{cases} -\hat{\omega} \dot{U} = fV \end{cases} \quad (5a)$$

$$\begin{cases} -\hat{\omega} \dot{V} = -fU \end{cases} \quad (5b)$$

$$\begin{cases} l\dot{V} + n\dot{W} = 0 \end{cases} \quad (5c)$$

$$\begin{cases} \ddot{\Phi} = \frac{N^2(\eta w_B - W)}{n(nW - \hat{\omega})} \end{cases} \quad (5d)$$

由式(5a、5b、5c)消去  $U, V$ , 得:

$$\ddot{\Phi} = -\frac{f^2 n}{l^2 \hat{\omega}} - \frac{n \hat{\omega}}{l^2} \ddot{W} \quad (6)$$

式(6)代入式(5d),整理后可得:

$$\ddot{W} + \frac{f^2}{\hat{\omega}} W = -\frac{N^2 l^2 (W - \eta w_B)}{n^2 \hat{\omega}^2 \left( 1 - \frac{nW}{\hat{\omega}} \right)} \quad (7)$$

式(7)是我们用于讨论 CISK 对线性和非线性惯性重力波影响的基本方程。

## 2 线性 CISK 对线性惯性重力波和非线性惯性重力孤波的影响

令  $w_B = bW^{[9]}$ , 代入式(7)有:

$$\ddot{W} + \frac{f^2}{\hat{\omega}^2} W = - \frac{N^2 l^2}{n^2 \hat{\omega}^2} (1 - \eta_b) \cdot \frac{W}{\left(1 - \frac{nW}{\hat{\omega}}\right)} \quad (8)$$

式中  $\eta_b = b\eta$ ,  $b$  为常数.

把式(8)在  $W = 0$  附近作 Talor 展开. 一般情况下,  $C_s$  取 22m/s,  $W \approx 10^0 \sim 10^1$  m/s, 所以  $\frac{nW}{\hat{\omega}} = \frac{W}{C_s} < 1$ , 因而有:

$$\ddot{W} + \frac{f^2}{\hat{\omega}^2} W = - \frac{N^2 l^2 (1 - \eta_b)}{n^2 \hat{\omega}^2} W \left[ 1 + \frac{nW}{\hat{\omega}} + \left( \frac{nW}{\hat{\omega}} \right)^2 + \dots \right] \quad (9)$$

取一次近似:

$$\ddot{W} + \frac{1}{n^2 \hat{\omega}^2} [f^2 n^2 + N^2 l^2 (1 - \eta_b)] W = 0 \quad (10a)$$

二次近似:

$$\ddot{W} + \frac{1}{n^2 \hat{\omega}^2} [f^2 n^2 + N^2 l^2 (1 - \eta_b)] W + \frac{N^2 l^2}{n \hat{\omega}^2} (1 - \eta_b) W^2 = 0 \quad (10b)$$

式(10a)和(10b)是用于讨论线性 CISK 影响下的线性和非线性惯性重力波的出发方程.

### 2.1 惯性重力波的线性稳定性

由式(10a)可知, 当  $f^2 n^2 + N^2 l^2 (1 - \eta_b) > 0$  时, 惯性重力波是线性稳定的, 当  $f^2 n^2 + N^2 l^2 (1 - \eta_b) < 0$  时, 惯性重力波是线性不稳定的. 所以, 当大气层结是稳定的 ( $N^2 > 0$ ), 在  $\eta_b < 1 + \frac{f^2 n^2}{N^2 l^2}$  时, 惯性重力波是线性稳定的, 在  $\eta_b > 1 + \frac{f^2 n^2}{N^2 l^2}$  时, 惯性重力波是线性不稳定的; 当大气层结是不稳定的 ( $N^2 < 0$ ), 结论与上面相反. 由此可知, 在层结稳定的大气中, 加热越强, 越容易产生线性不稳定; 在不稳定大气层结中, 弱的加热更易产生线性不稳定(图1). 令  $\tilde{\eta}_b = 1 + \frac{f^2 n^2}{N^2 l^2}$ , 那么, 稳定层结大气的  $\tilde{\eta}_b$  值比不稳定大气的  $\tilde{\eta}_b$  值大.

### 2.2 非线性重力孤波和 KDV 方程

由式(10b)知其特解为孤立波解, 此方程是著名的 KDV 方程, 其稳定性可用线性稳定性判据来判断. 式(10b)可写为:

$$\ddot{W} = G_1 W + G_2 W^2 \quad (11)$$

其中  $G_1 = \frac{-1}{n^2 \hat{\omega}^2} [f^2 n^2 + N^2 l^2 (1 - \eta_b)]$ ,  $G_2 = -\frac{N^2 l^2}{n \hat{\omega}^3} (1 - \eta_b)$ . 这时稳定的孤立波解为<sup>[11]</sup>:

$$W = \frac{3}{2} \frac{G_1}{G_2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{-G_1} \theta}{2} \right) - \frac{G_1}{G_2} \quad (12)$$

不稳定的重力惯性孤波解为<sup>[11]</sup>:

$$W = -\frac{3}{2} \frac{G_1}{G_2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{G_1} \theta}{2} \right] \quad (13)$$

式(12)和(13)中,  $\theta = ly + nz - \hat{\omega}t$ .

2.2.1 线性 CISK 对惯性重力孤波强度的影响 由式(12)和(13), 惯性重力孤波的强度  $A$  表示为:

$$A = \frac{3}{2} C_y \frac{l}{n} \left[ 1 + \frac{f^2 n^2}{N^2 l^2 (1 - \eta_b)} \right] \quad (14)$$

式中  $C_y = \frac{\hat{\omega}}{l}$  为  $y$  方向的惯性重力波相速度.

式(14)表明, 惯性重力孤波的强度与惯性重力波的波速成正比, 水平波速越大, 惯性重力孤波的强度越强; 反之, 惯性重力孤波的强度越弱, 这正是非线性波动的特点.

据文献[11]取  $\frac{l}{n} \approx 10^{-2}$ ,  $C_y \approx 22\text{m/s}$ ,  $f \approx 10^{-5}/\text{s}$ ,  $N^2 \approx \pm 1.0 \times 10^{-5}/\text{s}^2$ . 表 1 给出惯性重力波振幅与加热参数  $\eta_b$ 、大气层结  $N^2$  的计算结果( $\eta_b = 1$  是间断点).

表 1 惯性重力孤波振幅  $A(\text{m/s})$  与加热参数  $\eta_b$ 、大气层结  $N^2(\text{s}^{-2})$  的关系

Table 1 Relationships among the amplitude of the isolated inertial gravitational waves  $A(\text{m/s})$ , heating parameter  $\eta_b$  and the atmospheric stratification  $N^2(\text{s}^{-2})$

$\eta_b$	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6
$N^2 = 1.0 \times 10^{-5}$	0.36	0.38	0.50	0.17	0.27	0.30	0.31	0.31	0.32	0.32
$N^2 = -1.0 \times 10^{-5}$	0.30	0.27	0.26	0.50	0.38	0.36	0.35	0.35	0.34	0.34

由表 1 看出, 当大气层结稳定时, 在  $\eta_b = 1$  的两边, 加热越强, 惯性重力波强度越强, 加热越弱, 惯性重力波强度越弱; 而大气层结不稳定时, 在  $\eta_b = 1$  两边, 加热越强, 惯性重力孤波强度越弱, 加热越弱, 惯性重力孤波强度越强.

2.2.2 线性 CISK 对惯性重力孤波宽度的影响 由式(12)和(13), 惯性重力孤波的陡度  $\mu = \sqrt{G_1}/2$ , 宽度:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{2}{\sqrt{G_1}} = \frac{2C_y l n}{\sqrt{f^2 n^2 + N^2 l^2 (1 - \eta_b)}} = 2C_y \left\{ \frac{l^2}{f^2 + N^2 (1 - \eta_b) l^2 / n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

取  $C_y \approx 40\text{m/s}$ ,  $l/n \approx 10^{-2}$ ,  $f \approx 10^{-5}/\text{s}$ , 表 2 给出了  $\frac{1}{\mu}$  和  $\eta_b$ 、 $N^2$  的计算结果.

由表 2 可知, 当大气层结是稳定的, 加热越强, 惯性重力波越宽, 加热越弱, 惯性重力孤波越窄; 当大气层结是不稳定的, 则相反.

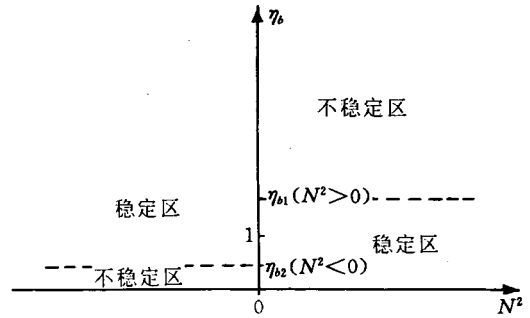


图 1 加热参数  $\eta_b$ 、大气层结  $N^2$  与惯性重力波稳定性的关系示意图(虚线为  $\eta_b$  的稳定与不稳定的分界线)

Fig. 1 Relationships among heating parameter  $\eta_b$ , atmospheric stratification  $N^2$  and stability of the inertial-gravitational waves (dashed lines, demarcation line of the stable and unstable regions)

表2 惯性重力孤波宽度  $\frac{1}{\mu}$  (km)和大气加热参数  $\eta_b$ , 大气层结稳定度  $N^2$ ( $s^{-2}$ )的关系Table 2 Relationships among the width of the isolated inertial gravitational waves  $1/\mu$  (km), heating parameter  $\eta_b$ (m/s) and the atmospheric stratification  $N^2$ ( $s^{-2}$ )

$\eta_b$	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8
$N^2=1.0 \times 10^{-7}$	76.2	77.7	79.2	80.8	82.5	84.3	86.0	88.3
$N^2=-1.0 \times 10^{-7}$	84.3	82.5	80.8	79.2	77.7	76.3	74.9	73.6

### 3 非线性 CISK 对线性惯性重力波和非线性惯性重力孤波的影响

令  $w_B = bW + dW^2 + eW^3$  [8], 并代入式(7):

$$\ddot{W} + \frac{f^2}{\hat{\omega}^2} W = -\frac{N^2 l^2}{n^2 \hat{\omega}^2} [W - \eta_b W - \eta_d W^2 - \eta_e W^3] \cdot \left[1 - \frac{nW}{\hat{\omega}}\right]^{-1} \quad (16)$$

式(16)中  $\eta_b = b\eta, \eta_d = d\eta, \eta_e = e\eta$ .

考虑到  $nW/\hat{\omega} = W/C_z < 1$ , 可以把式(16)在  $W = 0$  附近作 Talor 展开:

$$\ddot{W} + \frac{f^2}{\hat{\omega}^2} W = -\frac{N^2 l^2}{n^2 \hat{\omega}^2} [W - \eta_b W - \eta_d W^2 - \eta_e W^3] \cdot \left[1 + \frac{nW}{\hat{\omega}} + \left(\frac{nW}{\hat{\omega}}\right)^2 + \dots\right] \quad (17)$$

由式(17)得一阶近似和二阶近似的方程为:

$$\ddot{W} + \frac{1}{n^2 \hat{\omega}^2} [f^2 n^2 + N^2 l^2 (1 - \eta_b)] W = 0 \quad (18a)$$

$$\ddot{W} + \frac{1}{n^2 \hat{\omega}^2} [f^2 n^2 + N^2 l^2 (1 - \eta_b)] W + \frac{N^2 l^2}{n \hat{\omega}^3} [1 - n(b + C_y \frac{l}{n} d)] W^2 = 0 \quad (18b)$$

式(18a)和(18b)是讨论非线性 CISK 对线性和非线性惯性重力波影响的出发方程.

#### 3.1 非线性 CISK 对线性惯性重力波的影响

从式(18a)可以看出,式(18a)和(10a)形式上是一样的,当  $\eta_b = 0$ , 忽略线性 CISK 的影响,则非线性 CISK  $w_B = dW^2 + eW^3$  对线性惯性重力波的稳定性没有影响.

#### 3.2 非线性重力孤波和 KDV 方程

由式(17)取二次近似,可写为:

$$\ddot{W} = \hat{G}_1 W + \hat{G}_2 W^2 \quad (19)$$

其中  $\hat{G}_1 = -\frac{1}{n^2 \hat{\omega}^2} [f^2 n^2 + N^2 l^2 (1 - \eta_b)]$ ,  $\hat{G}_2 = -\frac{N^2 l^2}{n \hat{\omega}^3} [1 - (\eta_b + \frac{l}{n} C_y \eta_d)] = -\frac{N^2 l^2}{n^2 \hat{\omega}^3} [1 - (\eta_b + C_z \eta_d)]$ .  $C_y = \frac{\hat{\omega}}{l}$ ,  $C_z = \frac{\hat{\omega}}{n}$  分别为  $y, z$  方向的惯性重力波速.

加热参数  $\eta_b$  已在前面讨论过,当  $\eta_b = 0$  时,  $\hat{G}_1 = G_1, \hat{G}_2 = G_2$ , 这就是线性 CISK 对非线性惯性重力波影响的方程. 为了简单明了,令  $\eta_b = 0$ , 只讨论非线性 CISK 中的非线性加热参数  $\eta_d$  对非线性惯性重力波的影响,此时  $\hat{G}_1 = -\frac{1}{n^2 \hat{\omega}^2} [f^2 n^2 + N^2 l^2]$ ,  $\hat{G}_2 = -\frac{N^2 l^2}{n^2 \hat{\omega}^3} [1 - C_z \eta_d]$ .

由式(19)知,其特解为惯性重力孤波解,其稳定性可由线性稳定性判据得到,这时稳定的孤立波解为<sup>[11]</sup>:

$$W = \frac{3}{2} \frac{\hat{G}_1}{\hat{G}_2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{-G_1} \theta}{2} \right] - \frac{\hat{G}_1}{\hat{G}_2} \quad (20a)$$

不稳定的惯性重力孤波解为<sup>[11]</sup>:

$$W = -\frac{3}{2} \frac{\hat{G}_1}{\hat{G}_2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{G_1} \theta}{2} \right] \quad (20b)$$

式(20a)和(20b)中,  $\theta = ly + nz - \hat{\omega}t$ , 惯性重力孤波振幅  $A = \frac{3}{2} \frac{\hat{G}_1}{\hat{G}_2}$ , 宽度为  $\frac{1}{\mu} = \frac{2}{\sqrt{\hat{G}_1}}$ .

3.2.1 非线性 CISK 对惯性重力孤波强度的影响 由式(20a)和(20b)知, 惯性重力孤波振幅  $A$  为:

$$A = \frac{3}{2} \frac{l}{n} C_y \cdot \frac{f^2 n^2 + N^2 l^2}{N^2 l^2 \left( 1 - \frac{l}{n} C_y \cdot \eta_d \right)} \quad (21)$$

从式(21)可知,  $\frac{l}{n} C_y = C_x$ , 惯性重力孤波振幅与波速成正比, 与  $N^2(1 - C_x \eta_d)$  成反比. 为了定量地讨论  $\eta_d$  与  $A$  的关系, 取  $C_y \approx \pm 22\text{m/s}$ ,  $N^2 \approx \pm 10^{-5}\text{s}^{-2}$ (表 3).

表 3 惯性重力孤波振幅  $A$ (m/s) 与加热参数  $\eta_d$ (m/s), 大气层结  $N^2$ ( $\text{s}^{-2}$ ) 的关系

Table 3 Relationships among the amplitude of the isolated inertial gravitational waves  $A$ (m/s), heating parameter  $\eta_d$ (m/s) and the atmospheric stratification  $N^2$ ( $\text{s}^{-2}$ ) when  $C_y = 22\text{m/s}$  and  $C_y = -22\text{m/s}$ , respectively

	$\eta_d(C_y = 22\text{m/s})$						$\eta_d(C_y = -22\text{m/s})$					
	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
$N^2 = 10^5$	0.36	0.41	0.45	0.57	0.77	1.07	0.36	0.32	0.29	0.26	0.24	0.22
$N^2 = -10^{-5}$	0.30	0.34	0.40	0.49	0.63	0.87	0.30	0.26	0.23	0.21	0.19	0.19

通过表 3 发现, 当  $C_x > 0$  时 ( $C_y > 0$ ), 无论大气层结是稳定的 ( $N^2 > 0$ ), 还是不稳定的 ( $N^2 < 0$ ), 非线性 CISK 加强, 惯性重力孤波振幅加强; 非线性 CISK 减弱, 惯性重力孤波振幅减弱. 当  $C_x > 0$  ( $\frac{l}{n} C_y < 0$ ) 时, 非线性 CISK 加强, 惯性重力波的振幅减弱; 非线性 CISK 减弱时, 惯性重力孤波振幅加强.

3.2.2 非线性 CISK 与惯性重力孤波的宽度 式(19)表明, 惯性重力孤波宽度与  $\eta_d$  无关, 因而非线性 CISK 对惯性重力孤波宽度没有影响.

#### 4 小结和讨论

线性 CISK 影响线性惯性重力波的稳定性和非线性惯性重力孤波的强度和宽度, 这种影响受到大气层结稳定度的制约. 当大气层结稳定时, 线性 CISK 越强, 惯性重力孤波强度越强, 波越宽; 反之, 孤波强度弱, 波变窄. 当大气层结不稳定时, 线性 CISK 越强, 惯性重力孤波强度越弱, 波宽越窄; 线性 CISK 越弱, 孤波强度越强, 波宽越宽.

非线性 CISK 对线性重力波的稳定性和惯性重力孤波的宽度没有影响, 但对惯性重

力孤波的强度产生影响,这种影响还受扰动垂直传播方向制约。当惯性重力波由下向上传播时( $C_z > 0$ ),非线性 CISK 越强,惯性重力孤波振幅越强;非线性 CISK 越弱,惯性重力孤波振幅越弱。当惯性重力波由上向下传播时( $C_z < 0$ ),情况相反。

本文的结果,系用板对称的非线性大气动力学方程组,用行波法导出有 CISK 影响的 KDV 方程而获得的。由于模型十分简化,所得结果还需进一步研究。

### 参 考 文 献

- 1 Charney J G and Eliassen A. On the growth of the hurricane depression. *J. Atm. Sci.*, 1964, **21**: 68~75.
- 2 Ooyama K. A dynamic model for the study of tropic cyclone development. *Geofis. Intern.*, 1964, **4**: 187~198.
- 3 Bates J R. A generalization of the CISK theory. *J. Atm. Sci.*, 1973, **30**: 1509~1519.
- 4 Lindzen R S. Wave CISK in the tropics. *J. Atm. Sci.*, 1974, **31**: 156~179.
- 5 李崇银. 垂直切变基本气流中的 CISK. *大气科学*, 1983, **7**(4): 427~431.
- 6 李崇银. 环境流场对台风发生发展的影响. *气象学报*, 1983, **41**(3): 275~283.
- 7 伍荣生. CISK 理论中的若干问题. *气象学报*, 1987, **45**(2): 131~138.
- 8 Li Tianming and Zhu Yongti. On the multiple equilibrium of the development of tropical cyclone in nonlinear CISK model. *Advances in Atmos. sci.*, 1989, **6**: 447~457.
- 9 Li Chongyin. A further inquiry on the mechanism of 30—60 day oscillation in the tropical atmosphere. *Advances in Atmos. Sci.*, 1993, **10**(1): 41~53.
- 10 刘式适, 刘式达. 层结切变流中惯性重力内波的非线性稳定性. *气象学报*, 1984, **42**: 24~33.
- 11 Xia Youlong and Zheng Zuguang. The effects of vertical variation of basic flow and horizontal gradient of temperature on linear and nonlinear gravity waves. *Acta. Meteorologica. Sinica*, 1993, **7**(4): 495~504.

## THE LINEAR AND NONLINEAR INERTIAL-GRAVITATIONAL WAVES INFLUENCED BY CISK

Wang Yongzhong Xia Youlong

(Department of Atmospheric Sciences, Beijing Institute of Meteorology, Beijing 100081)

### Abstract

By using the equations of atmospheric dynamics with polar symmetry, the linear and nonlinear CISK heating processes are investigated. Using travelling wave method and theory of qualitative analysis of ordinary differential equation, the stability of the linear and nonlinear inertial-gravitational waves with CISK process and the influence of CISK process on the intensity and width of soliton of inertial-gravitational waves are discussed. The results show that linear CISK process affects not only the intensity of soliton, but also the width of the soliton, while nonlinear CISK process only affects intensity of the soliton.

**Key words:** CISK; Inertial-gravitational waves; Soliton; KDV equation; Nonlinear.