第7卷 第2期　　应用气象学报　　Vol. 7, №2
1996年5月　　QUARTERLY JOURNAL OF APPLIED METEOROLOGY　　May 1996

论当前大气动力模式中存在的若干问题*

廖洞贤
（南京气象学院，南京 210035）

提　　要

文章提出了当前大气动力模式中存在的若干问题，如垂直离散问题、提高分辨率的问题、极地流场的预报问题、间断问题、非线性混淆问题和高纬地区纬向差商的计算问题等. 在分析讨论这些问题时，也提出了可能解决的方法和途径，比如：垂直离散静力方程，在等距情况下，用 $\ln\sigma$ 坐标比用 σ 坐标会使计算误差显著减小；非线性混淆在用球谐函数作基函数时是存在的，但如参加乘积运算的函数足够光滑，非线性混淆作用可以忽略.

关键词：垂直离散；间断问题；非线性混淆.

引　　言

过去设计模式最重要的是应考虑全局物理性质和计算稳定性问题. 经过 40 多年的努力，这个问题已在很大程度上得到解决. 对于能量和质量守恒问题，不仅已设计出许多瞬时和隐式守恒格式，也提出了全离散显式守恒格式[1]. 同样，计算稳定性问题也取得巨大进展. 现在，积分一个月甚至一年以上而计算仍保持稳定，已是很普遍的事了. 在其他方面，如槽脊移速偏慢，降水量偏小等，也得到明显的改善. 不过，到目前为止，诸如暴雨和台风的预报、阻塞高压的预报以及较长时间的预报等仍然不能令人满意. 因而，就当前大气模式中存在的问题进行研究仍有现实意义.

下面将依次就垂直离散、提高分辨率、间断、非线性混淆和高纬地区纬向差商的计算等问题进行讨论. 在分析讨论这些问题时，也提出了可能解决问题的方法和途径.

1　垂直离散问题

垂直离散的处理，普遍采用差分法和跳点网格，后者又有等距和不等距两种. 在这方面存在的问题主要表现在静力方程的积分和垂直平流的计算上. 现分别进行讨论.

---

* 国家攻关课题 85-906-04-02 资助.
1994-12-26 收到，1995-03-08 收到修改稿.

1.1 静力方程

采用理想温度场：

$$T=\begin{cases}T_*-\Gamma z=T_*\sigma^{\tilde{\alpha}} & 1\geqslant\sigma>\sigma_s \quad (1a)\\ T_s & \sigma_s\geqslant\sigma\geqslant 0 \quad (1b)\end{cases}$$

并用按静力方程积分得到的位势高度准确值作标准，对用欧洲中心 1979 年方案(以下称 EC79) 计算的值作比较，可以得到 σ 坐标中在不同分辨率情况下位势高度的计算误差，如表 1 所示. 式(1) 中下标 $*$ 和 s 表示地面和对流层顶的值，其他都是气象中常用的符号；取 $p_*=1013.25$ hPa, $\tilde{\alpha}=R\Gamma/g$, $T_*=288.15$K, $z_*=0.0$ m, $\Gamma=0.0065$ K/m, $T_s=216.91$K, $p_s=228.0$ hPa, $z_s=10959$ m. 从表 1 中可以看出：计算误差不小，而且，不论分辨率如何，最大误差都大于 300 gpm.

表 1 用 σ 坐标等距分层时位势高度的计算误差(单位:gpm)

Table 1 Computational errors of geopotential in the case of equal $\Delta\sigma$ (in gpm)

N(层数)	$\lvert E_{\max}\rvert$	$\lvert\bar{E}\rvert$	$RMSE$
15	373.74	47.20	92.93
30	374.76	24.82	69.91
50	374.40	15.08	55.37
100	373.95	7.56	39.79

据分析[2]，误差主要是由用相邻两个半层上的位势高度的算术平均作为它们之间整层上的位势高度所引起的，特别是在平流层.

表 2 用 $\ln\sigma$ 等距分层时位势高度的计算误差

Table 2 Computational errors of geopotential in the case of equal $\ln\sigma$ (in gpm)

N(层数)	$\lvert E_{\max}\rvert$	$\lvert\bar{E}\rvert$	$RMSE$
15	18.56	7.56	6.87
30	4.69	2.45	2.78

不过，如用 $\ln\sigma$ 代替 σ 分层，在等距情况下引用 EC79 方案，则误差会大为减小，如表 2 所示. 对此，文献[2]中已有解释，在此不再重复.

1.2 垂直平流

在跳点网格中，计算垂直平流用得最多的是 Arakawa 格式，即

$$LA\approx-\frac{1}{2\Delta\sigma_k}\left[\dot{\sigma}_{k+\frac{1}{2}}(A_{k+1}-A_k)+\dot{\sigma}_{k-\frac{1}{2}}(A_k-A_{k-1})\right] \tag{2}$$

其中 LA 表示垂直平流，$\Delta\sigma_k=\sigma_{k+\frac{1}{2}}-\sigma_{k-\frac{1}{2}}$. 设 $\delta\sigma_{k-1}=\sigma_k-\sigma_{k-1}$，$\delta\sigma_k=\sigma_{k+1}-\sigma_k$，则只有等距情况下，即 $\Delta\sigma_k=\delta\sigma_{k-1}=\delta\sigma_k=$常数时，格式精度才为二阶，在其他情形，最多只能达到一阶. 这是令人失望的. 不但如此，由于大气的层结性，计算误差随高度的分布还有振荡现象，特别在对流层顶附近. 因此，如果把对流层顶附近的分辨率提高，可能是改善计算精度，消弱振荡的一个有效途径.

不过应祝明*曾用周期化方法，用正弦级数计算，并用理想场计算温度的垂直平流，得到远比 Arakawa 格式为好的结果. 如 E_{max}，Arakawa 的和正弦级数的值分别为 0.71 和 0.15；*RMSE* 的值分别为 0.25 和 0.06，后者明显小于前者.

2 提高分辨率的问题

众所周知，当分辨率提高时，截断误差减小，但这只在截断误差是计算误差的唯一来源时才成立. 如果用作计算的资料有误差，则这个结论就须修正. 1965 年 Зельдович-Мышкс 曾通过计算 $f(x)=\exp x$ 的一阶微商，发现 Δx 从 0.2 缩小到 0.1 时，确实得到了改进，但如进一步缩至 0.01 时，则结果反而变坏. 对于二阶微商的计算也得到类似结论[3].

从以上结果看出：当分辨率提高时，计算差商的截断误差减小，而资料误差引起的最大误差增大；当分辨率减小时，截断误差增大，而资料引起的最大误差减小. 因此，在它们之间有一个最优关系. 1983 年作者从二阶中央差出发，曾推出[4]

$$d_{op} = \frac{L}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon_{max}}{4A}} \tag{3}$$

其中 d_{op} 是最优网格距，L 是波长，A 是振幅，ε_{max} 是资料最大误差.

至于谱方法，修艾军等曾得出[5]

$$\sigma = \sum_{i=0}^{N-1}[F_i - \tilde{F}_n(x_i)]^2 \leqslant \sum_{i=0}^{N-1}[F_i - \overline{F}_n(x_i)]^2 + N(\varepsilon_0^2 + 2n\sigma_E^2) \tag{4}$$

其中 σ 为用观测资料只截取前 n 项($n < n'$，$N = 2n' + 1$)的有限 Fourier 展式在所有网格点的误差的平方和；F_i 为真值；$\tilde{F}_n$ 为截取前 n 项的带有资料误差的 F 值；$\overline{F}_n$ 为截取前 n 项的不带资料误差的 F 值；ε_0 为资料系统性误差；σ_E^2 为资料误差的方差. 从上式可以看出：如 $n = n'$，且资料没有误差，则 $\sigma = 0$. 还可以看出：上式右端第一项与 n 成反比，n 愈接近 n'，误差愈小；$2Nn\sigma_E^2$ 与 n 成正比，n 愈接近 n'，误差愈大. 故存在最佳项数 n_{op}.

显然，式(4) 在定性上和式(3) 是一样的. 它们都说明：在一定资料条件下，分辨率的提高应有一定限度；只有在不断提高资料的精度和密度的条件下，不断提高分辨率，以考虑较小尺度的运动才有意义.

3 极地流场预报

极地和其他地区一样，空气在不断流动，因而，也需要预报. 遗憾的是，由于风在极地没有定义，在大气动力和热力学方程中极地又是奇点，在全球大气模式中，一般都采取回避的办 法，未予预报. 如用$(U、V) = (u、v)\cos\varphi$代替 u, v；或用跳点的办法，使极地为质量点（只 Φ、T 有定义）等. 但这些都是权宜之计，不能根本解决问题，作为全面的预报，还是应该重新考虑的.

---

* 应祝明. 1993：在高纬地区减少网格点的预报试验和垂直平流计算的讨论. 中国气象科学研究院硕士论文.

其实，问题并不复杂，用旋转球面坐标的方法，把地球的极点移到新坐标的某非极点上应用新坐标的动力和热力学方程和一般的计算方法就可以制作极区的预报，而其它地区 仍用旧坐标，在交界处作插值处理. 不过，这需要两套坐标，使风场和经纬度能相互转换，新坐标的方程中也要增加一些项，运算要复杂一些.

4　间断问题

气象要素和模式有关物理量一般是连续的，但它们的空间微商有时不连续或近于不连续. 如沿垂直方向，在对流层顶和逆温处温度直减率的变化，以及在水平方向地形坡度在海陆交界处的突然变化等. 因此，在计算感热的垂直扩散和地形坡度等物理量时会遇到困难. 现以逆温层为例在等距分层情况下，感热的垂直扩散 F_{TV} 按下式计算.

$$
\begin{aligned}
F_{TV} &= \frac{g}{p_*}\frac{\partial}{\partial\sigma}\mu\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{T}{\sigma^{\kappa}}\right) \\
&\approx \frac{g}{p_*}\left\{\mu_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\hat{T}_{k+1}-\hat{T}_k}{\delta\sigma_k}\right)-\mu_{k-\frac{1}{2}}\left(\frac{\hat{T}_k-\hat{T}_{k-1}}{\delta\sigma_{k-1}}\right)\right\}\Big/\Delta\sigma_k \\
&\kappa = R/c_p
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中 $\hat{T}=T/\sigma^{\kappa}$，$\mu$ 是随 σ 而变的参数.

当 $\delta\sigma_k,\delta\sigma_{k-1}\to 0$ 时，必有 $\Delta\sigma_k\to 0$ 且 $F_{TV}\to\infty$. 这再一次说明，单纯提高分辨率并不能解决问题，反而使结果更糟了.

对于这个问题，如考虑在对流层顶或逆温处，$|\delta_\sigma^2 F|$ 较大，如果取那些地方的相应值满足

$$
|\delta_\sigma^2 F| > c_e \qquad (c_e \text{ 为经验参数}) \tag{6}
$$

且 $\sigma=\sigma_k$，则置

$$
(F_{TV})_k = \frac{1}{2}\left[(F_{TV})_k^{+} + (F_{TV})_k^{-}\right] \tag{7}
$$

可以避免因 $\Delta\sigma\to 0$，$F_{TV}\to\infty$ 的困难. 这里 F 表示某气象要素；在等距情形下：

$$
\delta_\sigma^2 F = F_{k+1} + F_{k-1} - 2F_k \tag{8}
$$

在不等距情形下：

$$
\delta_\sigma^2 F = 2(\alpha F_{k+1} + \beta F_{k-1} - F_k) \tag{9}
$$

而 $\alpha=\delta\sigma_{k-1}/(\delta\sigma_{k-1}+\delta\sigma_k)$，$\beta=\delta\sigma_k/(\delta\sigma_{k-1}+\delta\sigma_k)$；式(7)中 $(F_{TV})_k^{-}$、$(F_{TV})_k^{+}$ 各表示在 σ_k 面上下用单向差商表示的 $(F_{TV})_k$ 值.

5　非线性混淆问题

非线性项的计算是谱模式动力部分运算量最大的一部分，又是容易导致非线性计算不稳定的根源. 虽然，可以采用快速 Fourier 变换节省 CPU 时间，但 Legendre 变换至今还没有快速算法，运算量仍然很大. 而且，为了避免容易产生非线性计算不稳定的混淆现象，长时间以来，人们普遍采用了 Machenhauer 不等式[6]，如对于三角截断，须

$$N_1 \geqslant 3M + 1 \tag{10}$$

和

$$N_2 \geqslant \frac{3M+1}{2} \tag{11}$$

其中 N_1, N_2 各是纬圈和南北极之间的网格点数；M 是沿纬圈作 Fourier 变换的最大波数. 由此，一部分可以展开的波被舍弃了，拟合效果受到了影响. 这对于高分辨的模式来说影响不大，但对于低分辨的模式的影响则不可忽视. 而且，Machenhauer 只讨论了两个量的乘积，对于 3 个以上的量相乘，则不等式(10)、(11)不成立，还须要修正.

另一方面，陈雄山[7]曾提出：采用 Walsh-Hadamard 变换，其乘积仍然可以用原有的 Walsh-Hadamard 变换来表示，因而认为没有混淆现象.

从以上得知，关于非线性项的混淆问题尚有不同看法，需进一步研究.

5.1 非线性混淆

一般全球谱模式采用的基函数是球谐函数，通过非线性作用产生的新波如超出原来波的范围，则用原来的网格总会使其能分解的一部分短波受到歪曲，产生混淆，这和采用 Walsh-Hadamard 变换是不同的. 问题是：非线性混淆作用的影响怎样？如果小到可以忽略的程度，不考虑式(10)和(11)是可以的；但这还需要分析.

波的歪曲，归因于谱系数计算的不准确. 这有两个原因：一是 Fourier 系数计算不准；二是 Legendre 系数计算不准. 不难看出：两者的原因相似，我们只要讨论其中一个就够了. 设

$$A^{m_1} = \sum_{n_1=|m_1|}^{M} A_{n_1}^{m_1} P_{n_1}^{m_1}$$

$$B^{m_2} = \sum_{n_2=|m_2|}^{M} B_{n_2}^{m_2} P_{n_2}^{m_2}$$

其乘积 C^m 可以表示为

$$C^m = A^{m_1} B^{m_2} = \sum_{n_1=|m_1|}^{M} \sum_{n_2=|m_2|}^{M} A_{n_1}^{m_1} B_{n_2}^{m_2} P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2}$$

其中 A^{m_1}, B^{m_2} 各是物理量 A、B 的 Fourier 系数. 如 C^m 仍用原 Gauss 网格展开，而其展开系数 C_n^m 仍用 Gauss-Legendre 求积公式计算，按冯康等的算法[3]，其计算误差是

$$E_n = \frac{2^{n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \frac{\partial^{2n} f}{\partial \mu^{2n}}(\xi), \quad (-1 < \xi < 1) \tag{12}$$

其中 $f = C^m P_n^m$. 所以，E_n 的大小与 f，也即 C^m 的光滑性有关. 由此可以认为对于光滑性较高的场，如自由大气中的 Φ、T 等，不考虑不等式(10)、(11)问题较小；但对于 p_* 和 q 等，则不保证. 不过，对 p_*、q 等进行适当光滑，是可以缓解这个问题的.

5.2 3 个和 3 个以上量相乘的问题

对于 3 个量的乘积，在 Fourier 系数和 Legendre 系数的积分表达式中，被积函数的最大阶(或次数) 为 $4M$，显然，要避免非线性混淆，M 和 N_1, N_2 须满足不等式

$$N_1 \geqslant 4M + 1 \tag{13}$$

和

$$N_2 \geqslant (4M+1)/2 \tag{14}$$

对于 3 个以上量的乘积,则应满足

$$N_1 \geqslant (l+1)M+1 \tag{15}$$

和

$$N_2 \geqslant \frac{1}{2}[(l+1)M+1] \tag{16}$$

其中 l 为参加乘积运算的物理量的个数.

5.3　线性项和非线性项的处理

考虑线性项并不受式(10)、(11) 的影响,可以对线性和非线性项进行不同的处理.

设谱方程的形式是

$$\frac{\mathrm{d}A_n^m}{\mathrm{d}t} = L_{L_n^m} + L_{N_n^m} \tag{17}$$

其中 $L_{L_n^m}$、$L_{N_n^m}$ 分别是线性项和非线性项的系数.对于线性项来说,没有混淆现象,如 $N_1 = 2N_0+1$,在方程(17) 中,其左端项和 $L_{L_n^m}$ 的 $m_{\max}$ 和 $n_{\max}$ 各可以取为 N_0 与 N_2(对于三角截断,$N_0 = N_2$).但对于两个量相乘的非线性项,在 $2N_0/3 < m \leqslant N_0$ 和 $(2N_2-1)/3 < n \leqslant N_2$ 的范围内,$L_{N_n^m}$ 恒可以取作零.这样,总的运算量的增加是很小的,而计算的精度却提高了;并且,非线性混淆也不会产生.至于 3 个或 3 个以上量相乘的非线性项的处理,也可以采取类似的办法.

6　在高纬地区计算纬向差商的问题

由于在高纬地区纬向网格距很小,从而,在差分模式中,为了使时间步长可以取得和中纬度一样大,常须采用 Fourier 滤波,或短时间步长,或向极逐步减小的变时间步长,以保持计算的稳定.显然,后两种做法是很不经济的,而滤波又会带来波的变形和质量、能量是否守恒等问题.最近,廖洞贤提出一种既不需要滤波,又可以把时间步长取得和中纬度地区的相近的计算方案.其要点如下:

设某一纬向差分格式 $LA_{ij}/a\cos\varphi_j$ 具有一次或二次守恒性质,即

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{\Delta\lambda_i}{a\cos\varphi_j} LA_{ij} = 0 \tag{18}$$

或

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{A_{ij}}{a\cos\varphi_j} LA_{ij}\Delta\lambda_i = 0 \tag{19}$$

其中 L 表示和某微分算子相容的差分算子,$\sum_{i=1}^{I}$ 表示沿纬圈 φ_j 求和,I 是纬圈上的总的网格点数;A 是某一物理量.设 n 是一可以整除 I 的大于 1 的整数,用 $n\Delta\lambda$ 代替 $\Delta\lambda$,记这样的差分格式为 $\frac{1}{a\cos\varphi_j}L_nA_{ij}$,由于 LA_{ij} 和 L_nA_{ij} 在形式上是一样的,求和项数相同,二者总的运算量也应相同.

可以证明:采用 L_nA_{ij} 后大气总的一次和二次守恒性质仍然不变.

至于 n 的选取原则上应尽量使 L_nA_{ij} 在各不同纬带的截断误差接近，且和中纬度地区接近，还应考虑计算上的方便. 比如，取 $I=120$，则我们可以得到表 3. 这样，如 c 为波速，取

$$\Delta t \leqslant a\cos\varphi_j \cdot n\Delta\lambda/c = n(a\cos\varphi_j \cdot \Delta\lambda/c)$$

表 3 在球面均匀 λ_φ-网格中 n 的选取

Table 3 Choice of n in the spherical uniform λ_φ-grid

φ	0°～60°	60°～76°	76°～80°	80°～83°	83°～84°	84°～85°	>85°
n	1	2	3	4	5	6	8

对于蛙跃格式即可保证计算稳定. 于是，如采用表 3 中的 n 值，在 $\varphi>60°$N(或 $\varphi<60°$S)的地区，Δt 平均可增加 2～3 倍.

不过，上述方法在中高纬度交界处(如 60°N)，由于 n 从 1 变到 2，网格距突然增加，会导致截断误差分布的不连续. 为此，我们可以在北半球交界处以北取比其以南精度更高的差分格式. 如在 60°N 以南，LA_i 为二阶中央差的形式，60°N 以北，L_nA_i 为 4 阶中央差的形式. 这样，不仅截断误差趋于均匀，而且，预报效果也很接近[9][10]，从而缓解了这个问题造成的危害.

参 考 文 献

1 季仲贞，王斌. 再论发展方程差分格式的构造和应用. 中期数值天气预报研究成果汇编(4)，北京：气象出版社，1991. 145～155.

2 Zhu Yanqiu, Liao Dongxian, You Xingtian. Problems existing in the vertical discretization of the hydrostatic equation and improvement tests. *Acta Meteor. Sinica*, 1994, **8**(4): 384～391.

3 冯康等. 数值计算方法. 北京：国防工业出版社，1978. 22～23.

4 Liao Dongxian. Requirements of observational data for numerical weather prediction. Papers Presented at the Asia and Southwest Pacific Technical Conference on Operational Forecasting Including Interpretation of NWP, Geneva: WMO, 1983. 155～164.

5 修艾军，廖洞贤. 确定 Fourier 展式最佳截断项数的探讨. 气象学报，1991，**49**(3)：308～320.

6 Machenhauer B. Numerical Methods Used in Atmospheric Models II, Chapter 3, GARP Publication Series, 17, WMO, 1979. 17～18.

7 陈雄山. 非线性 Korteweg-de Varies 方程的高精度数值解法. 第 2 次全国数值天气预报会议论文集，北京：科学出版社，1980. 283～291.

8 廖洞贤. 在均匀经纬度网格中计算高纬纬向差商的问题. 应用气象学报，1994，**5**(2)：226～229.

9 廖洞贤，王两铭. 数值天气预报原理及其应用. 北京：气象出版社，1986. 115～119.

10 Campana K A. Higher order finite-differencing experiments with a semi-implicit model at NMC. *Mon. Wea. Rev.*, 1979, **107**(2): 363～376.

THE DISCUSSION OF SOME PROBLEMS EXISTING IN CURRENT ATMOSPHERIC DYNAMIC MODELS

Liao Dongxian

(*Nanjing Institute of Meteorlolgy, Nanjing* 210035)

Abstract

Some problems existing in current atmospheric dynamic models are proposed, such as vertical discretization, increasing resolution, prediction of the polar regions, discontinuous problems, nonlinear aliasing, computation of the longitudinal finite-difference quotient in high latitudes and so on. In analyzing those problems, possible ways for solving them are suggested and discussed. For example, in discretizing the hydrostatic equation in the vertical, taking $\ln\sigma$ as the vertical coordinate, instead of σ in the case of equal interval, is able to reduce computational errors substantially, and nonlinear aliasing can be neglected only in the case that the factors of the product computation are smooth sufficiently when spherical harmonics are taken as basis functions.

Key words: Vertical discretization; Discontinuous problem; Nonlinear aliasling.