

气候噪声和气候系统的分维*

辛国君

(北京大学地球物理系, 北京 100871)

提 要

根据相空间嵌入定理, 按照 Grassberger 和 Procaccia 提出的计算分数维的方法, 利用近百年来南、北半球地面气温资料, 估算了气候吸引子的分数维. 计算结果表明: 气候吸引子的分数维南半球为 3.3~3.7, 北半球为 3.2~3.7. 它提供了气候吸引子的自相似结构的基本信息, 表明模拟气候系统最少需要 4 个独立变量. 另外, 还讨论了气候噪声对估算维数的影响.

关键词: 分数维; 相空间; 气候吸引子; 气候噪声.

引 言

气候变化是大气、海洋、冰雪圈、陆面和生物圈之间非线性相互作用的结果, 且受外界因素如太阳辐射、火山活动、人类活动等的外强迫作用. 气候系统是一个外有强迫、内有非线性耗散的开放系统, 其状态必然是混沌吸引子. 因此, 气候现象是无特征尺度的, 具有自相似结构. 分数维能反映气候系统的混沌性质, 反映气候吸引子的自相似结构, 而且它和 Lyapunov 指数有密切联系^[1, 2]. 就非线性耗散动力系统而言, 若要有正的 Lyapunov 指数, 系统的初态经过长时间演变后就无法预测其状态, 则系统存在奇怪吸引子. 因此, 分数维与系统的可预测性问题有着密不可分的内在联系.

从气候资料时间序列估算气候系统的分数维, 可验证气候系统是混沌态, 给出研究气候系统所需要的最小独立变量数目, 为寻找气候演变规律、研究气候预报时限等提供一些依据^[3].

在实际计算气候吸引子维数时, 要特别注意气候资料包含着噪声干扰, 如何处理随机噪声是个非常重要的问题, 本文在第 4 部分作详细讨论.

1 分数维的计算方法

1983 年 Grassberger 和 Procaccia^[4]提出了一个分数维的计算方法, 它比较适合于实

* 本工作由北京大学青年科学基金资助.

1995-06-19 收到, 1995-10-30 收到修改稿.

际观测资料时间序列,大致步骤如下:

(1) 数据标准化 标准化后的时间序列的总体平均值为0,均方差为1.为方便起见,标准化后的时间序列用一个变量的时间序列 $\{x_i\}$ 表示:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad (1)$$

(2) 重构相空间 要从时间序列式(1)获取动力系统吸引子的演化信息,描述吸引子的结构,根据嵌入定理^[5],可以建立一个 m 维相空间代替动力系统的状态空间,且能保持吸引子的拓朴结构不变.一般要求 m 充分大于吸引子的维数,即Kolmogorov容量维 v , m 必须大于 $2v+1$,通常 m 的取值是从 $2v+1$ 到 v^2 .相空间的相点 \vec{X}_i 与时间序列之间具有如下关系:

$$\vec{X}_i = (x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau)) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

其中 τ 为延滞参数, $\tau = k\Delta t$, k 取正整数.为了保证该方法能够刻画混沌吸引子的结构特征, τ 的选择应保证 m 维相空间的各个分量线性无关,相空间这些点 $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \dots$ 形成一条混沌轨道.

(3) 取不同的距离上限 l ,算出对应的关系函数 $C(l, m)$:

$$C(l, m) = \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}} \theta(l - \|\vec{X}_i - \vec{X}_j\|) \quad (3)$$

其中 θ 是Heaviside函数:当 $r > 0$ 时, $\theta(r) = 1$;当 $r < 0$ 时, $\theta(r) = 0$. $C(l, m)$ 是一个累计分布函数,它描写了相空间中两点之间的距离 $\|\vec{X}_i - \vec{X}_j\|$ 小于 l 的概率.如果 l 值取得太小,两点距离 $\|\vec{X}_i - \vec{X}_j\|$ 都超过 l ,则 $C(l, m) = 0$;如果 l 值取得太大,任何两点之间的距离 $\|\vec{X}_i - \vec{X}_j\|$ 都比 l 小,则 $C(l, m) = 1$.只要 l 大小适当,关联函数就反映吸引子的性质.

(4) 计算分数维 D 按照维数的定义 $C(l, m) \sim l^D$,便知 $\log_2 C(l, m) \sim \log_2 l$ 曲线上直线部分的斜率就是吸引子的关联维数 D ,一般情况下 $D \leq v$.当吸引子覆盖均匀时, $D = v$.为方便起见,这里我们把 D 称为吸引子的维数.

(5) 不断增大 m ,重复步骤(2)~(4) 若 $\log_2 C(l, m) \sim \log_2 l$ 图上直线部分的斜率随 m 增大而无较大变化,此时可求得吸引子的维数.若有较大变化,表明不存在混沌吸引子.

2 南北半球近百年来的气温时间序列

下面列出本文选用的南北半球气温时间序列,这些都是目前公认的具有代表性的研究工作^[6~8]:

资料1: Jones 序列1, 1858~1984年南半球 $2.5^\circ \sim 62.5^\circ \text{S}$ 逐月平均气温距平(相对于1951~1970年的平均值, $n=1524$, $\Delta t=1$ 个月)

资料2: Jones 序列2, 1858~1984年南半球 $2.5^\circ \sim 90^\circ \text{S}$ 逐月平均气温距平(相对于1951~1970年的平均值, $n=1524$, $\Delta t=1$ 个月)

资料3: Jones 序列3, 1851~1984年北半球逐月平均气温距平(相对于1951~1970年的平均值, $n=1608$, $\Delta t=1$ 个月)

资料 4: Vinnikov 序列 1, 1881~1987 年北半球逐月平均气温距平(相对于 1951~1975 年的平均值, $n=1284$, $\Delta t=1$ 个月)

资料 5: Vinnikov 序列 2, 1881~1987 年南半球 $0^\circ\sim 60^\circ\text{S}$ 逐月平均气温距平(相对于 1951~1975 年的平均值, $n=1284$, $\Delta t=1$ 个月)

气温资料的精确度要受许多因素的影响, 因此这些统计资料难免与真实的气候自然变化存在着一定的偏差, 本文将此偏差称为气候噪声. 为了能从这些资料中获取合理的气候系统的分数维, 必须确定噪声强度, 弄清气候噪声对气候吸引子分形结构的影响, 才能在估算气候吸引子维数时排除噪声干扰. 这是一个非常关键的问题.

3 估算吸引子维数时如何排除噪声干扰

为了更好地理解气候吸引子的分形结构, 现分析以下两个问题:

3.1 随机数的相空间轨道^[9]

给定一个随机数时间序列, 那么在重建的 m 维相空间中, 其相点应是均匀分布的, 时间演化轨道充满整个相空间, 故其维数应是 m :

$$C(l) \sim l^m \quad (4)$$

通常由于随机数的时间序列长度是有限的, 故在 $\log_2 C(l, m) \sim \log_2 l$ 图上直线斜率将随着 m 增大而增大, 但是它小于嵌入维数.

3.2 受噪声扰动的混沌吸引子(Noisy Attractor)

在实际测量时, 随机噪声不可避免, 它在小于噪声强度 l_{noise} 的尺度上改变了原本真实的吸引子结构, 使之变得模糊一些, 但不会使吸引子的原来面貌彻底崩溃. 若把吸引子嵌入 m 维相空间中, 随机噪声就会在小于 l_{noise} 的尺度上表现出来, 类似于随机数, 关联函数满足:

$$C(l, m) \sim l^m \quad (l < l_{\text{noise}}) \quad (5)$$

当选择的尺度 $l > l_{\text{noise}}$ 时, 关联维数才能反映吸引子的分形特征:

$$C(l, m) \sim l^D \quad (l > l_{\text{noise}}) \quad (6)$$

很明显, 在双对数曲线上, 存在一点 l_b 对应于噪声强度(指在量级水平上), 该点前后直线的斜率有较大差异. $l > l_b$ 时直线的斜率为 D , 而 $l < l_b$ 时, 直线斜率接近 m , 通常由于资料长度的限制, 直线斜率会低于 m .

选用 Henon 映射^[10]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + by_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (7)$$

取 $a=1.4$, $b=0.3$ ^{[4][11]} 作出 Henon 映射平面图(图略). 其中有一种情况, 在迭代过程中未加随机扰动, 代表真实的吸引子结构; 第二和第三种情形是给迭代的每一步强加随机扰动, 其大小分别限制在 $[-0.001, 0.001]$ 和 $[-0.05, 0.05]$ 之间. 所得结果表明, 加入一定的随机扰动后, 吸引子的结构变得模糊一些, 轮廓不那么清楚了.

图 1 给出了按 Henon 映射生成的时间序列 $\log_2 C(l, m) \sim \log_2 l$ 图. 曲线 1 代表未加

噪声扰动的情形，直线斜率代表 Henon 映射吸引子分数维， $D=1.25$ ；曲线 2 和 3 代表加入噪声扰动的情形，噪声大小分别在 $(-5 \times 10^{-4} \sim 5 \times 10^{-4})$ 和 $(-5 \times 10^{-3} \sim 5 \times 10^{-3})$ 之间。两条曲线上都存在转折点 l_b ，对应于噪声强度 l_{noise} ，在 $l < l_{noise}$ 时，直线斜率接近嵌入维数 3。

郑祖光等^[12]利用大气湍流资料估算大气运动的维数时，是通过物理考虑和上机调试的方法，选取适当的距离上限来计算维数。Fraedrich^[9]选用台站气象资料、深海岩芯氧同位素记录等确定天气系统和气候系统的维数时，将观测资料与高斯型随机数序列（其方差与观测资料的方差相同）两者的双对数图进行比较，确信资料是否蕴涵有明显的混沌吸引子结构，这也是排除噪声干扰的一种方法。

4 气候吸引子的分数维

4.1 确定气候噪声强度 l_{noise}

将实际气候资料视为一个受到噪声扰动的混沌吸引子的表现行为，这样在双对数图中尺度较小的一端就具有性质(5)（即式(5)），尺度较大的一端就具有性质(6)（即式(6)），采用最小二乘法进行直线回归拟合，便有图 2（采用资料 1）所示的结果，那么，直线 1 与曲线分离的位置便对应着 l_{noise} 。计算中发现该位置会随着 m 增大而变大。直线 2 反映气候吸引子的性质，其斜率就是分数维。线性相关系数大于 0.99。

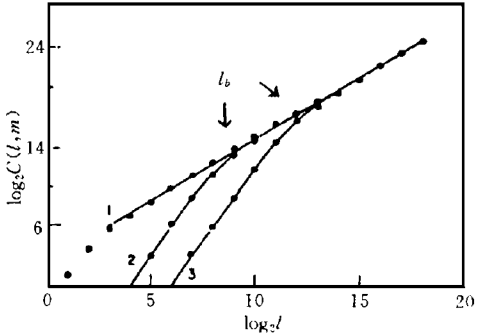


图 1 Henon 映射的双对数图 ($m=3$)

Fig. 1 $\log_2 C(l, m)$ as a function of $\log_2 l$ for Henon map embedded in three dimensions (Curve 1 is for the map without noise. Curve 2 and 3 are for the map with noise)

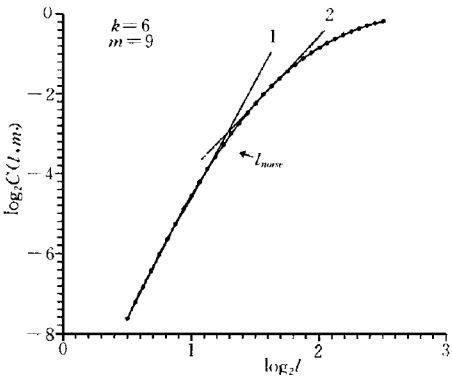


图 2 在双对数图上确定气候噪声的强度

Fig. 2 The climate noise strength l_{noise} is determined by the least square method on doubly logarithmic axes

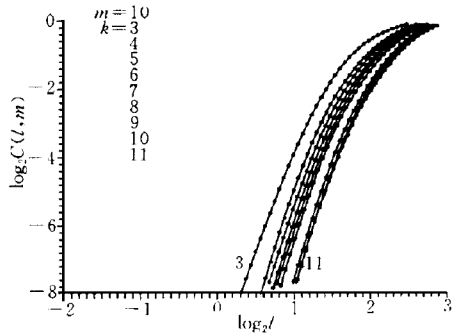


图 3 Jones 序列 1 的关联函数与滞后参数的依赖关系

Fig. 3 The dependence between the correlation function and time delay (Jones serial No. 1)

4.2 选择合理的滞后系数 $\tau=k\Delta t$

将吸引子嵌入充分大维数的相空间，单变量的时间序列在相空间中形成的混沌轨道（或拓扑结构）应与滞后参数没有明显的关系。图 3 给出了 Jones 序列 1 的关联函数与滞后参数的关系，从左到右曲线分别代表滞后参数 $k=3, 4, 5, \dots, 11$ （嵌入维数 $m=10$ ），为避免各曲线相互重叠，依次右移一小段距离。观察随 k 变化的情况可知，曲线形状未出现明显变化。其他 4 个气候资料也具有同样的结果。

在计算分维数过程中，取 $k=6$ 即 $\tau=6\Delta t$ 就基本满足了要求。在双对数图 4 和 5 中，曲线从左到右分别代表嵌入维数 $m=3, 4, \dots, 11$ 。

4.3 气候吸引子的维数

利用资料 1、2、5，计算得到南半球的双对数图 $\log_2 C(l, m) \sim \log_2 l$ ，如图 4 所示。从图上可看出，关联函数直线部分的斜率随嵌入维数 m 的增大而稍有变化，这说明南半球气候系统是一个混沌吸引子。由不同的南半球气温资料求得的维数大小略有差异，但是基本稳定在 3.3~3.7（这里认为 $m=7$ 已足够大），计算结果见表 1。

利用资料 3、4，计算得到北半球的双对数图 $\log_2 C(l, m) \sim \log_2 l$ 双对数图，分别如图 5 所示。从图上可知，关联函数直线部分的斜率随着嵌入维数的增大而只有较小的改变，这说明北半球气候系统是一个混沌吸引子。由不同的北半球气温资料求得的维数大小稍有差异，但基本稳定在 3.2~3.7 之间（这里认为 $m=7$ 已足够大）。计算结果见表 1。

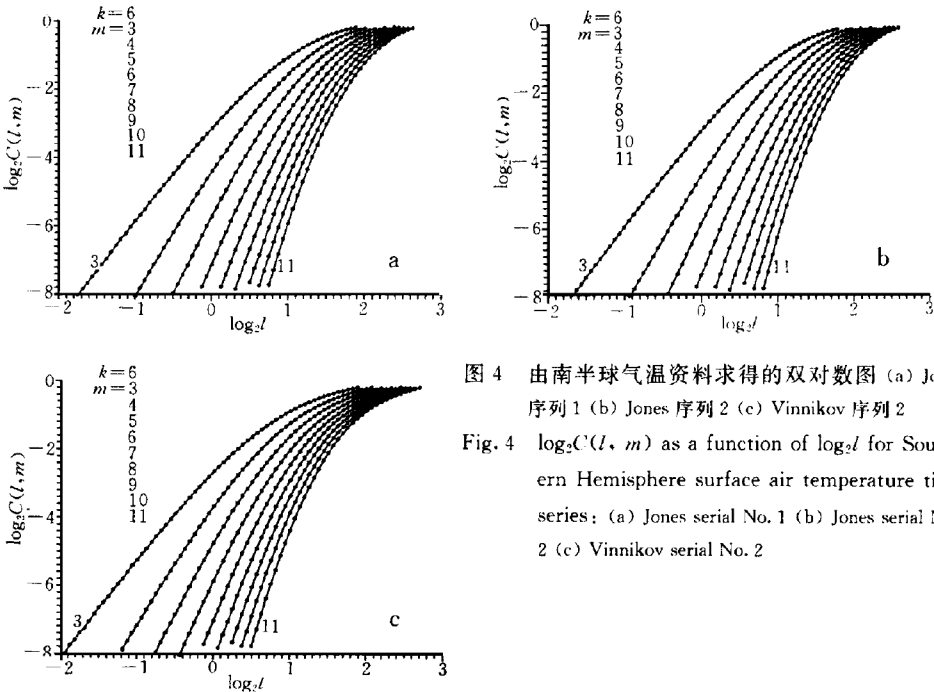


图 4 由南半球气温资料求得的双对数图 (a) Jones 序列 1 (b) Jones 序列 2 (c) Vinnikov 序列 2

Fig. 4 $\log_2 C(l, m)$ as a function of $\log_2 l$ for Southern Hemisphere surface air temperature time series: (a) Jones serial No. 1 (b) Jones serial No. 2 (c) Vinnikov serial No. 2

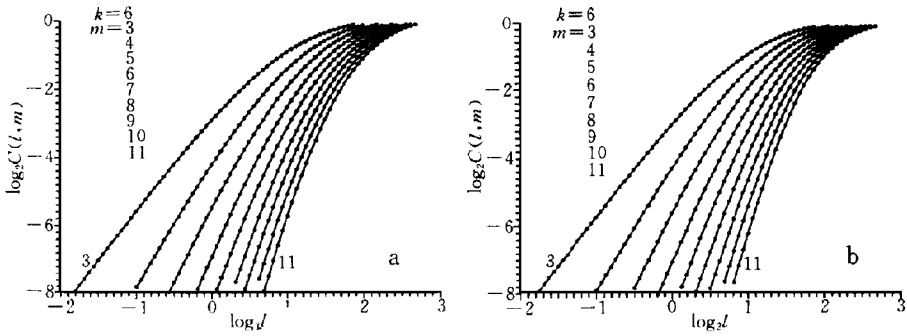


图 5 由北半球气温资料求得的双对数图 (a) Jones 序列 3 (b) Vinnikov 序列 1

Fig. 5 $\log_2 C(l, m)$ as a function of $\log_2 l$ for Northern Hemisphere surface air temperature

(a) Jones serial No. 3 (b) Vinnikov serial No. 1

依据计算结果不难得出，气候吸引子的维数在 3 到 4 之间，模拟气候动力系统至少需要 4 个独立变量。

表 1 南、北半球气候吸引子的维数

Table 1 The fractal dimensions of the Southern and Northern Hemisphere climate attractor

嵌入 维数 m	资料 1 的 D 值	资料 2 的 D 值	资料 3 的 D 值	资料 4 的 D 值	资料 5 的 D 值
3	2.81	2.83	2.78	2.79	2.80
4	2.80	2.86	2.68	2.82	2.81
5	3.17	3.26	3.05	3.04	2.93
6	3.18	3.20	3.33	3.37	3.02
7	3.47	3.37	3.17	3.38	3.18
8	3.32	3.54	3.36	3.50	3.35
9	3.47	3.72	3.40	3.74	3.52
10	3.44	3.57	3.50	3.75	3.52
11	3.46	3.61	3.67	3.62	3.45

5 结 论

(1) 利用气候资料估算气候吸引子的维数时，要消除气候噪声对关联函数的影响，方可得到合理的维数。本文提供的方法是可行的、有效的。

(2) 本文利用南、北半球近百年来气温时间序列，估算了气候吸引子的分数维，其大小分别为 3.3~3.7 和 3.2~3.7。

(3) 分数维描述了气候系统的混沌性质，根据计算结果，可以认为模拟气候系统所需要的独立变量数目不得低于 4 个，这为研究气候变化提供一些基本信息。从分数维角度研究气候变化也是一个新途径。

参 考 文 献

- 1 刘式达, 刘式适. 分形和分维引论. 北京: 气象出版社, 1993.
- 2 Eckmann J P, Ruelle D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. of Mod. Phy.*, 1985, **57**: 617~656.
- 3 郑祖光, 刘式达. 用天气变量时间序列估计天气的可预报性. *气象学报*, 1992, **50**: 72~80.
- 4 Grassberger P, Procaccia I. Characterization of strange attractors. *Phy. Rev. Lett.*, 1983, **50**: 346~349.
- 5 Rulle D. Chemical kinetics and differentiable dynamical systems. In: *Nonlinear phenomena in chemical dynamics*. eds. Pacault A and Vidal C. Spinger-Berlin: 1981. 30~37.
- 6 Jones P D, Raper S C B and Wigley TML. Southern Hemisphere surface air temperature variations 1851~1984. *J. Climatol. Appl. Meteor.*, 1986, **25**: 1213~1230.
- 7 Jones P D, Bradley R S, Diaz H F, et al. Northern Hemisphere surface air temperature variations 1851~1984. *J. Climatol. Appl. Meteor.*, 1986, **25**: 161~179.
- 8 Vinnikov K Ya, Groisman P Ya and Lugina K M. Empirical data on contemporary global climate changes (temperature and precipitations). *J. of Clim.*, 1990, **13**: 662~677.
- 9 Fraedrich K. Estimating the dimensions of weather and climate attractor. *J. Atmos. Sci.*, 1986, **143**: 419~432.
- 10 Ben-Mizrachi A, Procaccia I. Characterization of experimental(noisy)strange attractors. *Phy. Rev. A.*, 1983, **29**: 975~977.
- 11 Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.*, 1976, **50**: 69~75.
- 12 郑祖光, 刘式达. 用大气湍流资料计算 Lyapunov 指数和分数维. *气象学报*, 1988, **46**: 41~48.

CLIMATE NOISE AND ESTIMATING THE DIMENSIONS OF CLIMATE ATTRACTOR

Xin Guojun

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871)

Abstract

The dimensions of climate attractor are estimated from phase space trajectories of observed climate variables(Southern and Northern Hemisphere surface air temperature) based on the method estimating the fractal dimensions given by Grassberger and Procaccia. The results show that the fractal dimensions of climate attractor are 3.3~3.7 for the Southern Hemisphere, and 3.2~3.7 for the Northern Hemisphere. They provide the primary information for the descriptions of self-similar properties of the climate attractor, and the four independent variables are needed at least for simulated climate system. Also, the effects of the noise on estimating dimensions of climate attractor are discussed.

Key words: Fractal dimension; Phase space; Climate attractor; Climate noise.