

# 地形对地转气流中重力惯性波稳定性影响的进一步研究\*

钟 中

周小刚

(空军气象学院, 南京 211101)

(北京气象学院, 北京 100081)

## 提 要

用一个带地形的2层均质流体线性模式, 考虑了底层流体平均厚度不均匀性的影响, 研究低空地转气流中波动的传播和稳定性.

关键词: 地形; 地转气流; 波动稳定性.

## 引 言

巢纪平<sup>[1]</sup>, 曾庆存等<sup>[2]</sup>曾提出超临界地转气流可导致重力惯性波的不稳定发展理论. 继后, 吕克利<sup>[3]</sup>和张维桓等<sup>[4]</sup>进一步考虑了地形以及积云对流对低空地转气流中波动稳定性的影响. 但上述工作所用模型, 均假定了地形上空为常值地转气流, 并与其对应的简单两层流体平均分界面高度(即下层流体平均厚度)也是常值. 因此文献<sup>[3]</sup>和<sup>[4]</sup>的结果只能在地转气流较弱即平均分界面高度是缓变的情况下才能成立. 本文则在文献<sup>[3]</sup>的基础上进一步引入平均分界面高度不均匀性的影响, 讨论了地形坡度和地转气流强度对波动的移行和稳定性的影响.

## 1 线性模式和频率方程

由文献<sup>[3]</sup>, 考虑两层不可压流体, 对下层流体有控制方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -g^* \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -g^* \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h - h_s)u + \frac{\partial}{\partial y}(h - h_s)v &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $h$  为两层流体分界面高度,  $h_s$  为地形高度,  $g^* = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ , 而  $\rho_1, \rho_2$  分别为上、

\* 本文由空军中期数值预报课题资助.

1995-11-23 收到, 1996-02-15 收到修改稿.

下层流体密度. 令

$$u = \bar{u} + u', \quad v = v', \quad h = H + h' \quad (2)$$

设  $\bar{u}$  为常数, 并假设  $\bar{u}$  和平均分界面高度  $H$  之间满足地转关系

$$g^* \frac{\partial H}{\partial y} = -f\bar{u} \quad (3)$$

将式(2)代入式(1), 再假设  $h_s = h_s(y)$  且  $h_s \ll H$ , 则可得到线性化方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} - f v' &= -g^* \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + f u' &= -g^* \frac{\partial h'}{\partial y} \\ \frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial x} - \left(\frac{f\bar{u}}{g^*} + A\right) v' + H \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $A = \frac{dh_s}{dy}$  为地形坡度, 也设为常数. 为方便起见, 本文仅讨论半无界空间中的问题,

因此, 边界条件可取为

$$y = 0 \text{ 时}, \quad h' \text{ 有界}; \quad y \rightarrow -\infty \text{ 时}, \quad h' \text{ 有界} \quad (5)$$

取谐波解, 令

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(y) \\ v_0(y) \\ H_0(y) \end{pmatrix} e^{ik(x-ct)} \quad (6)$$

代入式(4)得

$$\begin{aligned} ik(\bar{u} - c)u_0 - f v_0 &= -ikg^* H_0 \\ ik(\bar{u} - c)v_0 + f u_0 &= -g^* \frac{dH_0}{dy} \\ ik(\bar{u} - c)H_0 - \left(\frac{f\bar{u}}{g^*} + A\right) v_0 + H \left(iku_0 + \frac{dv_0}{dy}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

由地转关系式(3), 设  $y=0$  时,  $H=H_{00}$ , 则有

$$H = H_{00} - \frac{f\bar{u}}{g^*} y \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)可导得单一变量方程:

$$\begin{aligned} [(\bar{u} - c)c_g^2 - f\bar{u}(\bar{u} - c)y] \frac{d^2 H_0}{dy^2} - g^* \tilde{A}(\bar{u} - c) \frac{dH_0}{dy} + \\ [k^2(\bar{u} - c)f\bar{u}y - k^2 c_g^2(\bar{u} - c) + g^* f\tilde{A} - s(\bar{u} - c)] H_0 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式中  $c_g^2 = g^* H_{00}$ ,  $\tilde{A} = A + \frac{f\bar{u}}{g^*}$ ,  $s = f^2 - k^2(\bar{u} - c)^2$  不失一般性, 设  $\bar{u} \neq 0$ , 这样式(9)是

Laplace 型方程, 作变换<sup>[5]</sup>

$$H_0 = e^{ky} \tilde{H}, \quad y = -\frac{\tilde{y}}{2k} + \frac{c_g^2}{f\bar{u}} \quad (10)$$

式(9)可变为

$$\tilde{y} \frac{d^2 \tilde{H}}{d\tilde{y}^2} + (r - \tilde{y}) \frac{d\tilde{H}}{d\tilde{y}} - \alpha \tilde{H} = 0 \quad (11)$$

式中  $r = \frac{g^* \tilde{A}}{f\bar{u}}$ , 而

$$\alpha = \frac{kg^* \tilde{A}(\bar{u} - c) - g^* f \tilde{A} + s(\bar{u} - c)}{2kf\bar{u}(\bar{u} - c)} \quad (12)$$

相应的边界条件成为

$$\begin{aligned} \tilde{y} = 2kc_g^2/f\bar{u} \text{ 时, } \quad \tilde{H} \text{ 有界} \\ \tilde{y} \rightarrow +\infty \text{ 时, } \quad H_0 \propto e^{-\frac{\tilde{y}}{2}}, \tilde{H} \text{ 有界} \end{aligned} \quad (13)$$

式(11)是合流超几何方程的标准形式, 其解为合流超几何函数  $F(\alpha, r, \tilde{y})$ , 即

$$\tilde{H} \propto F(\alpha, r, \tilde{y}) \quad (14)$$

由  $F(\alpha, r, \tilde{y})$  的渐近性质可知, 当  $\tilde{y} \rightarrow +\infty$ , 且  $\alpha$  不为负整数时

$$F(\alpha, r, \tilde{y}) \propto e^{\tilde{y}} \quad (\tilde{y} \rightarrow +\infty) \quad (15)$$

$$\text{则} \quad H_0 \propto e^{-\frac{\tilde{y}}{2}} \quad F(\alpha, r, \tilde{y}) \propto e^{\frac{\tilde{y}}{2}} \rightarrow +\infty (\tilde{y} \rightarrow +\infty) \quad (16)$$

即当  $\alpha$  不为负整数时, 不可能有满足边界条件的非零解. 而当  $\alpha$  为负整数时:

$$\alpha = -n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

$F(\alpha, r, \tilde{y})$  退化为  $\tilde{y}$  的  $n$  次多项式, 即

$$F(\alpha, r, \tilde{y}) \propto \tilde{y}^n \quad (\tilde{y} \rightarrow +\infty) \quad (18)$$

此时

$$H_0 \propto e^{-\tilde{y}/2} \tilde{y}^n \rightarrow 0 \quad (\tilde{y} \rightarrow +\infty) \quad (19)$$

故可以有满足边界条件的非零解, 又由式(12)、(17)

令  $p = -\{kf[(2n+1)\bar{u} + g^*A/f] + f^2\}/k^2$ ,  $q = f^2(\bar{u} + g^*A/f)/k^2$ , 则可得频率方程:

$$(\bar{u} - c)^3 + p(\bar{u} - c) + q = 0 \quad (20)$$

其中  $n$  在物理上相当于径向波数.

## 2 波动稳定性分析

频率方程(20)是3次代数方程, 根据代数方程的理论它有3个根, 分别代表低空地转气流中的3支波动, 而只有当

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0 \quad (21)$$

时, 式(20)有两个共轭复根, 它们所代表的波动才有可能出现不稳定发展. 为判断式(20)所表示的波动的稳定性特征, 对于地转气流  $\bar{u}$  介于  $-40 \sim 40$  m/s, 地形坡度  $A$  介于  $-80\text{‰} \sim 80\text{‰}$  之间两者的各种配置, 分别计算了  $\Delta$  的数值, 从而根据判据  $\Delta$  是否大于零判断波动是否稳定. 计算时, 取  $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $g^* = 0.86 \text{ m/s}^2$  (为作图方便起见, 在  $\bar{u} = 0$  时也用近似插值给出结果). 图1是取波长  $L = 300 \text{ km}$ , 当分别取  $n = 0, n = 3, n = 6$  时,  $\Delta$  随  $\bar{u}$  和  $A$  的分布. 由图1a可见, 当  $n = 0$  时,  $\Delta$  的数值随地形坡度和基本气流的不同均发生很大变化, 最不稳定性波出现在地形北坡 ( $A < 0$ ) 的东风气流中 ( $\bar{u} < 0$ ), 并且, 北坡

越陡, 东风气流越强, 波动越是远离稳定状态. 当地形北坡  $|A| > 40‰$  时, 东、西风气流中的波动则都有可能出现不稳定现象. 而当地形坡度介于  $-40‰ \sim 40‰$  之间时, 东、西风气流中的波动有可能是稳定的, 也有可能是不稳定的, 其临界线约为沿  $A + \bar{u} = 0$  有少许波动的曲线. 而当地形南坡坡度  $A > 40‰$  时, 所有基本气流中的波动都是稳定的.

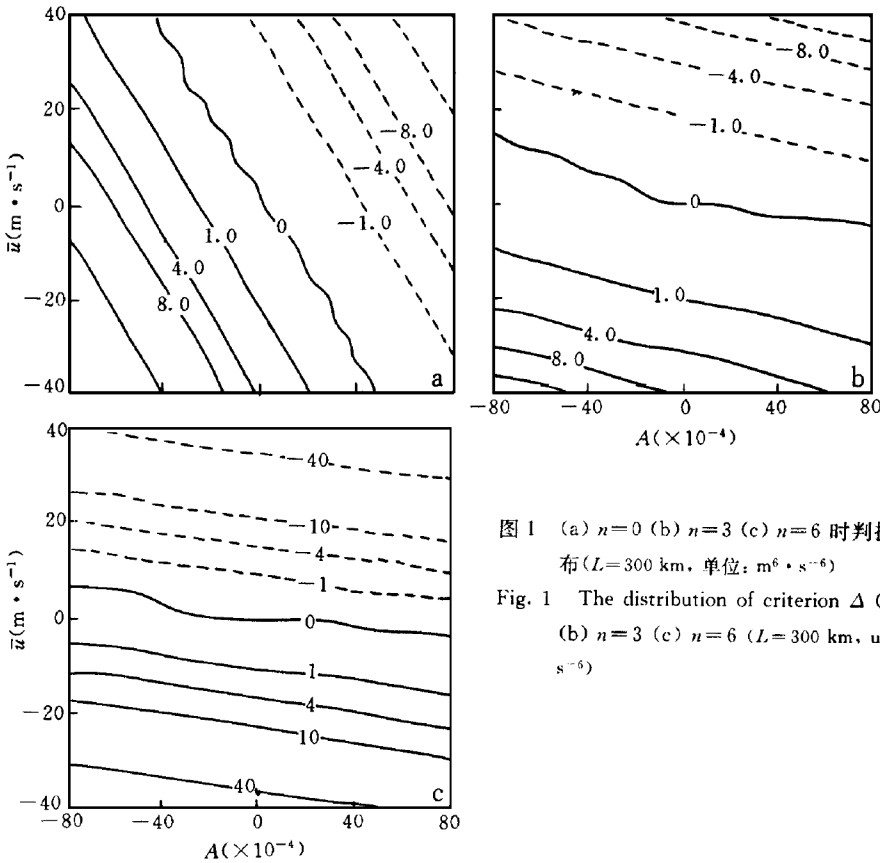


图 1 (a)  $n=0$  (b)  $n=3$  (c)  $n=6$  时判据  $\Delta$  的分布 ( $L=300 \text{ km}$ , 单位:  $\text{m}^6 \cdot \text{s}^{-6}$ )  
 Fig. 1 The distribution of criterion  $\Delta$  (a)  $n=0$  (b)  $n=3$  (c)  $n=6$  ( $L=300 \text{ km}$ , unit:  $\text{m}^6 \cdot \text{s}^{-6}$ )

计算表明, 随着径向波数  $n$  的增加, 虽然最不稳定波仍出现在地形北坡东风气流中, 但波动稳定性的分布受地形坡度的影响越来越小(图 1 b、1c), 而主要取决于基本气流的分布. 例如:  $n=6$  时(图 1c)基本上只有东风气流中的波动才有可能出现不稳定, 而西风气流中的波动都是稳定的. 并且随  $n$  的进一步增加, 波动稳定性的分布形式不再有明显的变化, 只是判据  $\Delta$  的绝对值不断增加. 改变波长后的计算结果表明, 波动稳定性特征和波长关系不大.

### 3 波动的移行和增长率

频率方程(20)可用牛顿下山法<sup>[5]</sup>求出数值解, 图 2 是取  $L=300 \text{ km}$ ,  $n=3$  时计算得

到的3支波动相对于基本气流的相速( $c_r - \bar{u}$ )随 $\bar{u}$ 和 $A$ 的分布. 图2 a, b 分别代表反向传播的重力惯性波, 而图2 c 代表地形罗斯贝波. 由图2 a, b 可见, 只有在西风基本气流中, 重力惯性波才会出现较大的相对于基本气流的东传和西传现象, 并且在地形北坡  $A$  介于 $-60\text{‰} \sim -20\text{‰}$  范围内, 相对相速随地形坡度的变化最为强烈. 而在东风气流中, 相对相速均较小.

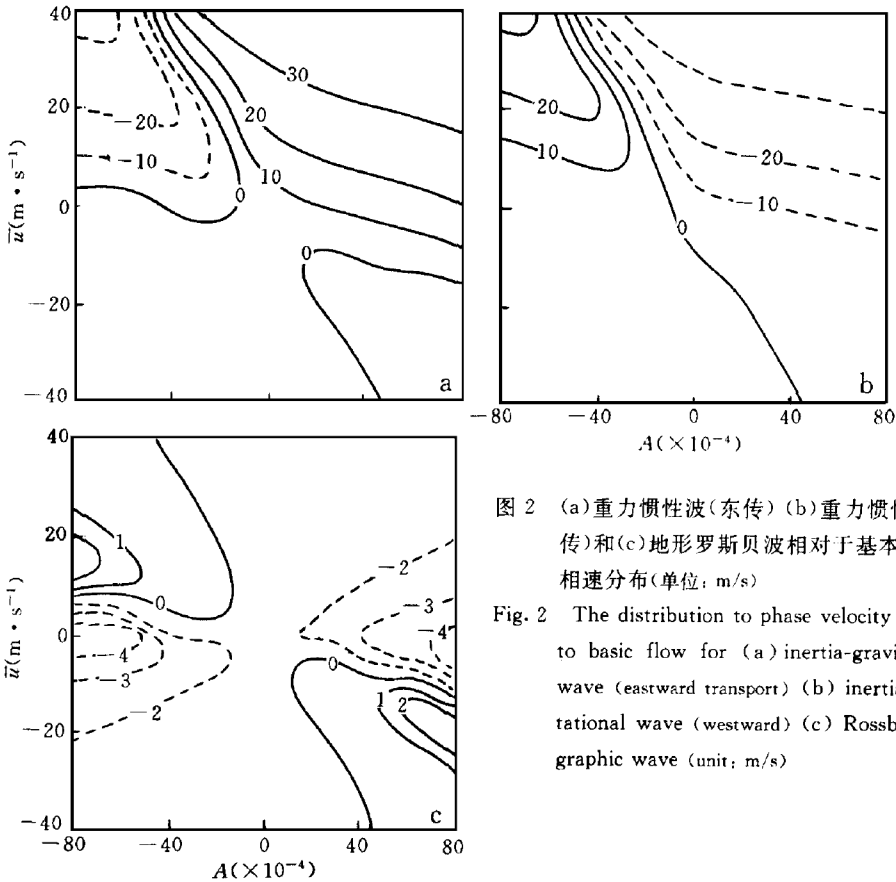


图2 (a)重力惯性波(东传)(b)重力惯性波(西传)和(c)地形罗斯贝波相对于基本气流的相速分布(单位: m/s)

Fig. 2 The distribution to phase velocity relative to basic flow for (a) inertia-gravitational wave (eastward transport) (b) inertia-gravitational wave (westward) (c) Rossby topographic wave (unit: m/s)

地形罗斯贝波(图2 c)的相对相速在基本气流较弱时( $-20 \text{ m/s} < \bar{u} < 20 \text{ m/s}$ )反而较大, 并且地形坡度越大, 相对相速也越大. 而在地形坡度为零附近, 地形罗斯贝波相对于基本气流是静止的. 可见, 地形罗斯贝波和地形坡度关系非常密切. 基本上在地形南坡(北坡),  $\bar{u} < -10 \text{ m/s}$  ( $\bar{u} > 10 \text{ m/s}$ ) 的区域内, 地形罗斯贝波相对于基本气流是东传的, 而在地形南坡(北坡),  $\bar{u} > -10 \text{ m/s}$  ( $\bar{u} < 10 \text{ m/s}$ ) 的区域内是西传的. 平均来看, 地形罗斯贝波的相对相速较重力惯性波小一个量级左右.

图3是和图2相应的三支波动增长率( $\delta = kc_r$ )的分布. 由波动增长率分布可见, 在有可能出现波动不稳定的区域内(见图1 b), 一支重力波总是衰减的, 另一支却总是不稳

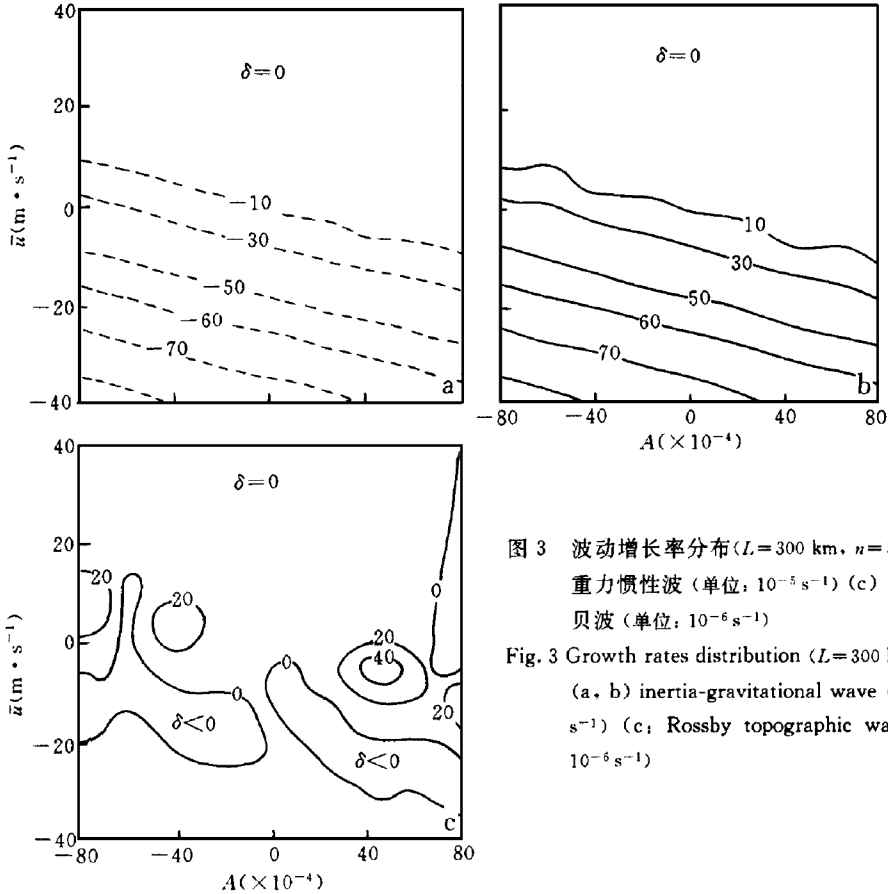


图 3 波动增长率分布 ( $L=300 \text{ km}$ ,  $n=3$ ) (a, b) 重力惯性波 (单位:  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ) (c) 地形罗斯贝波 (单位:  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$ )

Fig. 3 Growth rates distribution ( $L=300 \text{ km}$ ,  $n=3$ ) (a, b) inertia-gravitational wave (unit:  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ) (c; Rossby topographic wave (unit:  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ))

定的, 最不稳定的重力惯性波出现在地形北坡强东风气流中. 例如, 在地形北坡当  $A=-40‰$ ,  $\bar{u}=-20 \text{ m/s}$  时, 不稳定重力惯性波振幅的  $e$  倍增长时间约为  $28 \text{ min}$ , 而在地形南坡  $A=40‰$ ,  $\bar{u}=-20 \text{ m/s}$  时, 相应的增长时间约为  $35 \text{ min}$ , 这是重力惯性波发展较快的两种情况. 在基本气流较弱时, 振幅的  $e$  倍增长率时间量级为  $1\sim 2 \text{ h}$ , 在波动稳定区(图 1b), 重力惯性波都是中性的( $\delta=0$ ). 和图 2 a, b 比较发现, 不稳定增长和衰减的重力惯性波相对于基本气流移速缓慢, 而中性重力惯性波相对于基本气流移速较快.

地形罗斯贝波有两个相对强的不稳定区, 一个在地形北坡( $A=-40‰$ )上空弱西风气流中( $\bar{u}\approx 5 \text{ m/s}$ ), 另一个在地形南坡( $A=40‰$ )上空弱东风气流中( $\bar{u}\approx -5 \text{ m/s}$ ) (图 3 c), 和图 2 c 比较发现, 这两个区域地形罗斯贝波相对基本气流也是静止少动的. 地形罗斯贝波的最不稳定增长率也较重力惯性波小一个量级.

径向波数取不同值时的计算表明, 和上节关于稳定性的结果一致, 即  $n$  越大, 波动的增长率也越大, 但波动的增长率和地形坡度的关系越小. 波长( $L$ )的变化不改变波动稳定性的分布特征, 但波长越长, 3 支波动的增长率都越小, 而相对基流的相速都越大.

## 4 结 论

本文利用一个带地形的2层均质流体线性模式,在下层流体平均厚度不均匀的情况下,讨论地形坡度的大小和地转基流的强弱对波动稳定性的影响,得到以下结论:

(1) 地形北坡上空强东风气流中的波动最易出现不稳定发展.当径向波数较小时,波动的稳定性受地形坡度和基本气流影响均很大.而当径向波数较大时,波动的稳定性和地形坡度关系不大.

(2) 只有在西风基本气流中重力惯性波才会出现明显的相对于基本气流的东传和西传现象,地形罗斯贝波的相对相速在基本气流较弱时,随地形坡度的增加而增加,而在基本气流较强时,相对速度较小.

(3) 不稳定的重力惯性波相对于基本气流移速缓慢,而中性重力惯性波相对于基本气流移速较快.不稳定的地形罗斯贝波分别出现在地形北坡上空弱西风气流中以及地形南坡上空弱东风气流中( $n=3$ 时),随着径向波数的改变,不稳定地形罗斯贝波出现的位置有所变化.

(4) 波动稳定性的特征和波长关系不大.

### 参 考 文 献

- 1 巢纪平,吴钦岳.地转气流中的重力惯性波.气象学报,1964,34:523~530.
- 2 曾庆存.数值天气预报的数学物理基础.北京:科学出版社,1979.
- 3 吕克利.地形对低空气流上重力惯性波稳定性的影响.大气科学,1986,10:220~224.
- 4 张维桓,丁正平.地形和积云对流对重力惯性波不稳定增长的影响.热带气象,1991,7:8~15.
- 5 刘式适,刘式达.特殊函数.北京:气象出版社,1988.105.
- 6 刘德贵,费景高,于泳红.FORTRAN 算法汇编(第一分册).北京:国防工业出版社,1980.320~326.

## A STUDY ON EFFECT OF TOPOGRAPHY ON THE STABILITY OF GRAVITATIONAL INERTIAL MODE IN GEOSTROPHIC FLOW

Zhong Zhong

(Air Force Institute of Meteorology, Nanjing 211101)

Zhou Xiaogang

(Beijing Institute of Meteorology, Beijing 100081)

### Abstract

By using a two-layer homogeneous fluid linear model with topography, including the influence of nonuniformity of lower fluid mean depth, the propagation and stability of geostrophic flow at low levels were studied.

**Key words:** Topography; Geostrophic flow; Wave stability.