

基本气流对赤道 Rossby 波和重力波的影响^{*}

周小刚

钟 中

(北京气象学院, 北京 100081)

(空军气象学院, 南京 211101)

提 要

应用考虑基本气流作用的赤道 β 平面线性模式, 分析了基本气流对赤道 Rossby 波和重力波的影响. 分析表明, 基本西风气流中西传的赤道 Rossby 波和西传重力波仍有混合现象, 基本东风气流将使 Rossby 波出现不稳定增长, 而基本东风气流中的 Rossby 波和重力波是完全可分的。

关键词: 基本气流 混合 Rossby 重力波 波力不稳定

引 言

自 Matsuno^[1]首先从理论上探讨了热带大气中基本的波动类型, 指出热带地区赤道附近存在两类性质不同的波动, 即混合 Rossby 重力波和 Kelvin 波以后, 观测研究也完全证实了这两类波动的存在^{[2][3]}. Matsuno^[1]和 Kuo^[4]的研究指出, 当经向波数 $n \geq 1$ 时, Rossby 波和重力波是可分的, 而当 $n=0$ 时, Rossby 波和重力波将出现混合现象, 但他们的研究未能考虑基本气流的影响. 本文则利用考虑基本气流作用的 β 平面线性模式, 讨论了基本气流对赤道波动的影响, 以便说明在对流层上部的平流层下部易于观测到混合 Rossby 重力波, 而且对流层中下层的东风气流中难以观测到两者的混合波动的原因. 并进一步讨论了基本气流对赤道 Rossby 波和重力波稳定性的影响.

1 基本方程及其求解

取赤道 β 平面近似, 对于有自由面的均质不可压缩流体, 在静力平衡及存在基本气流条件下扰动运动方程组为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \beta y v' + \frac{\partial \phi'}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \beta y v' + \frac{\partial \phi'}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

^{*} 国家自然科学基金和空军中期数值预报项目资助。

1996-01-18 收到, 1996-10-22 收到修改稿。

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \phi'}{\partial x} + \beta y \bar{v} v' + C_g^2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0$$

其中 \bar{u} 为基本气流, 设为常数, C_g 为纯重力波波速, $C_g^2 = gH$. 取时间和长度特征值分别为

$$[T] = \left(\frac{1}{\beta C_g} \right)^{\frac{1}{2}}, [L] = \left(\frac{C_g}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

由此可以得到 $[V] = C_g$, $[\Delta \Phi] = C_g^2$, 这样, 方程组(1)的无因次形式为

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + M \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - y^* v^* + \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} = 0$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + M \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + y^* u^* + \frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + M \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} - M y^* v^* + \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = 0$$

式(13)中带 * 的量均为无因次变量, $M = \bar{u}/C_g$.

令

$$(u^*, v^*, \phi^*) = (\tilde{U}(y^*), \tilde{V}(y^*), \tilde{\Phi}(y^*)) e^{i(k^* x^* - \omega^* t^*)} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)(略去星号), 可得到关于 \tilde{V} 的单一变量方程:

$$\frac{d^2 \tilde{V}}{dy^2} + My \frac{d\tilde{V}}{dy} + [\tilde{\omega}^2 - M - k^2 - \frac{k}{\omega} - (1 + \frac{kM}{\omega} y^2)] \tilde{V} = 0 \quad (5)$$

式中 $\tilde{\omega} = \omega - kM$, k 相当于纬向波数.

$$\text{记} \quad a = \tilde{\omega}^2 - \frac{M}{2} - k^2 - \frac{k}{\omega}, \quad b = 1 + \frac{kM}{\omega} + \frac{M^2}{4} \quad (6)$$

作变换

$$y = \eta/b^{\frac{1}{4}}, \quad \tilde{V} = e^{\frac{M}{4} y^2} W \quad (7)$$

则式(5)可变成下列第一种 Weber 方程

$$\frac{d^2 W}{d\eta^2} + \left(\frac{a}{\sqrt{b}} - \eta^2 \right) W = 0 \quad (8)$$

对于赤道附近的波动, 水平边界条件可取下述自然边界条件

$$\text{当 } y \rightarrow \pm \infty \text{ 时, } \quad \tilde{V} < \infty \text{ (有界)} \quad (9)$$

在此边界条件下可解出本征函数 $\tilde{V}(y)$ 为

$$\tilde{V}(y) = e^{\left(\frac{M}{4} - \frac{\sqrt{b}}{2}\right)y^2} H_n(\sqrt[4]{b} y) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

本征值为

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (11)$$

而 H_n 为 n 阶 Hermite 多项式, n 在物理上相当于经向波数. 式(11)即是频率方程, 可以写成

$$\tilde{\omega}^2 - \frac{M}{2} - k^2 - \frac{k}{\omega} = (2n + 1) \left(1 + \frac{kM}{\omega} + \frac{M^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

当不考虑基本气流时($M=0$),式(12)简化为

$$\tilde{\omega}^3 - (k^2 + 2n + 1)\omega - k = 0 \quad (13)$$

而此时,对于低频波,回到有因次形式近似地有

$$C = \frac{\omega}{k} \simeq - \frac{\beta}{k^2 \frac{\beta}{C_g} (2n - 1)} \quad (14)$$

其中 C 为低频率相速,这是西传的赤道 Rossby 波.对于高频波回到有因次形式近似地有

$$C = \frac{\omega}{k} \simeq \pm C_g \sqrt{1 + \frac{\beta}{k^2 C_g} (2n + 1)} \quad (15)$$

式中 C 分别是两个高频波的相速,表示向东和向西传播的两支重力波.式(14)和式(15)即是式(1)的结果,我们的工作则将式(1)作了推广.

为便于求式(12)的数值解,将式(12)两边取平方可得到:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^6 - 2\left(\frac{M}{2} + k^2\right)\tilde{\omega}^4 - 2k\tilde{\omega}^3 + \left[\left(\frac{M}{2} + k^2\right)^2 - (2n + 1)^2\left(1 + \frac{M^2}{4}\right)\right]\tilde{\omega}^2 + \\ \left[2k\left(\frac{M}{2} + k^2\right) - kM(2n + 1)^2\right]\tilde{\omega} + k^2 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

由于自然边界条件的要求,由式(10)可知,求解式(16)时应考虑约束条件

$$\gamma \equiv R_e \left(\frac{M}{2} - \sqrt{b} \right) < 0 \quad (17)$$

其中 R_e 表示取实部.

2 基本气流对 Rossby 波和重力波混合性的影响

用牛顿下山法^[5]可以方便地求出由方程(16)决定的 6 个根的数值解,再应用方程(12)对求得的 6 个根逐个判别,剔除了 3 个增根,剩下的满足方程(12)的 3 个根则代表大气中的 3 支波动.图 1 分别是取 $M=0, M=0.2, M=-0.2$ 时计算得到的频率(解的实部)随 k 和 n 的分布.

图 1a 即是 Matsuno^[1]的结果,可见在基本气流为零时,经向波数 $n=0$ 的西传 Rossby 波和西传重力波在波长小于 18000 km(取 $C_g=100\text{m/s}, \beta=2.29 \times 10^{-11}\text{m/s}$,下同)时的所有波段都出现混合现象,且 Rossby 波总是西传的.而由图 1b 可见,考虑了西风基本气流的作用以后,在 $n=0$ 时,仍有西传 Rossby 波和西传重力波的混合现象,但此时出现混合的波长范围介于 7500~22000km 之间.比较不同强度的西风气流计算结果(图略)发现,只要有西风气流存在, Rossby 波和重力波的混合现象总是存在的,而且西风气流越强,出现混合的波长范围越大,混合波长越向短波方向扩展.而在基本东风气流作用下(图 1c),所有波长的波动都是可分的,没有出现 Rossby 波和重力波的混合现象.事实上,在观测研究方面,之所以首先在平流层下层观测到混合 Rossby 重力波^[2],正是由于在该高度上赤道地区上空有西风气流存在造成的,而在对流层中下层,由于盛行东风气流, Rossby 波和重力波是可分的,所以没有关于观测到混合 Rossby 重力波方

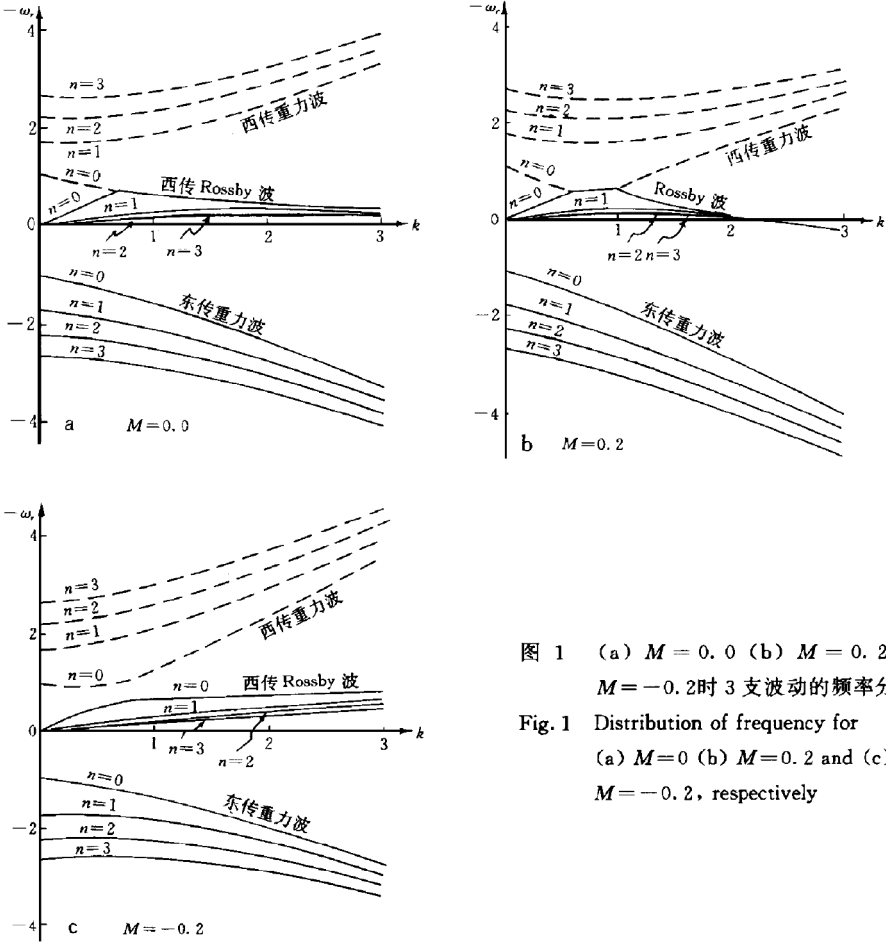


图 1 (a) $M = 0.0$ (b) $M = 0.2$ (c) $M = -0.2$ 时 3 支波动的频率分布
 Fig. 1 Distribution of frequency for (a) $M = 0$ (b) $M = 0.2$ and (c) $M = -0.2$, respectively

面的报道. 另一方面, 由于西风气流的存在, Rossby 波将出现随基本气流东传现象, 对于给定的西风气流(见图 1c), 将存在一个相应的临界波长 L_c , 当波长 $L > L_c$ 时, Rossby 波都是西传的, 而当 $L < L_c$ 时, Rossby 波则出现随基本气流的东传现象(对所有 n 均如此), 而且西风气流越强, 临界波长也越长, 例如, $M = 0.2$ 即 $\bar{u} = 20 \text{ m/s}$ 时, $L_c \approx 5400 \text{ km}$, 而 $M = 0.4$ 即 $\bar{u} = 40 \text{ m/s}$ 时, $L_c \approx 7800 \text{ km}$.

3 基本气流对波动稳定性的影响

令

$$\Delta = -\frac{1}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 + \frac{k^2}{4} \quad (18)$$

容易证明，当 $k = \frac{1}{2}$ 时， Δ 有最大值

$$\Delta_{\min} = 0 \quad (19)$$

所以，根据代数方程的理论，方程 (13) 有 3 个实根，即基本气流为零时，3 支波动都是中性的(稳定)，而考虑了基本气流的作用以后，波动的稳定性将发生变化。上节在求出 3 支波动频率的同时也求得了 3 支波动相应的增长率(ω_i)，图 2 是 $n=0$ 时， $0 \leq k \leq 2$ 范围内 3 支波动增长率的分布(其中东传重力波增长率为零)，可见，考虑了基本气流的作用以后，西传 Rossby 波将出现不稳定发展，东传重力波是中性的，西传重力波则是衰减的，并且随着基本西风气流的增强，不稳定 Rossby 波范围向短波方向扩展，最不稳定 Rossby 波的波长是随 M 的增加而减少的，增长率却

是随 M 的增加而增加的。例如，在 $M=0.2$ 时，最不稳定 Rossby 波波长 $L_m \approx 14000 \text{ km}$ ，相应的无因次增长率 $\omega_m \approx 0.145$ ，由此可确定相应的 Rossby 波振幅 e 倍增长时间 T_e 约为 40 h，而当 $M=0.4$ 时， $\omega_m \approx 0.205$ ， $T_e \approx 28 \text{ h}$ 。因此，可以看到，考虑了基本气流的作用以后可以解决赤道 β 平面线性模式的一个基本问题，即混合 Rossby 重力波不存在有限波长的最大增长率，并且 Rossby 波比重力波具有更大的增长率(见图 2)。这也正是赤道 β 平面线性模式需要解决的另一个问题。

4 关于约束条件的一些说明

上文由频率方程讨论基本气流对赤道 Rossby 波和重力波的影响时，没有考虑约束条件式 (17)。由上文讨论可知，受基本气流的作用影响最大的是 $n=0$ 时的 Rossby 波和重力波，因此下面仅在 $n=0$ 的情况下，说明约束条件式 (17) 对频率方程解的制约。图 3 分别是由 3 支波动的频率和增长率求得的 γ 值(见式 (17)) 随基本气流和波数的分布。由图 3 可见：对于东传重力波，约束条件是自然满足的；对于 Rossby 波和西传重力波而言，在东风基本气流作用下，约束条件也是自然满足的。但强西风气流中 ($M > 0.7$) 西传重力波解只在 $k < 0.6$ (相当于波长 $L > 21900 \text{ km}$ 的超长波) 时才满足约束条件式 (17) (见图 3c)，在 $k > 2$ (相当于波长 $L < 6500 \text{ km}$ 的波动) 时，只有很弱的西风气流 ($\bar{u} \leq 5 \text{ m/s}$) 中的 Rossby 波解才满足约束条件(图 3a)。所幸的是，上两节基本上都局限于讨论 $k < 1.5$ 范围内基本气流的影响。而由图 3a 可见，在 $k < 1.5$ (相当于波长 $L > 8750 \text{ km}$ 的波动) 时，对

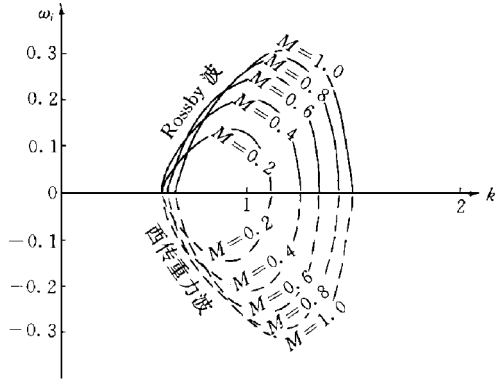


图 2 Rossby 波(实线)和重力波(虚线)无因次增长率分布($n=0$)

Fig. 2 Distribution of non-dimensional growth rate of Rossby wave (solid line) and gravity wave (dashed line) for $n=0$

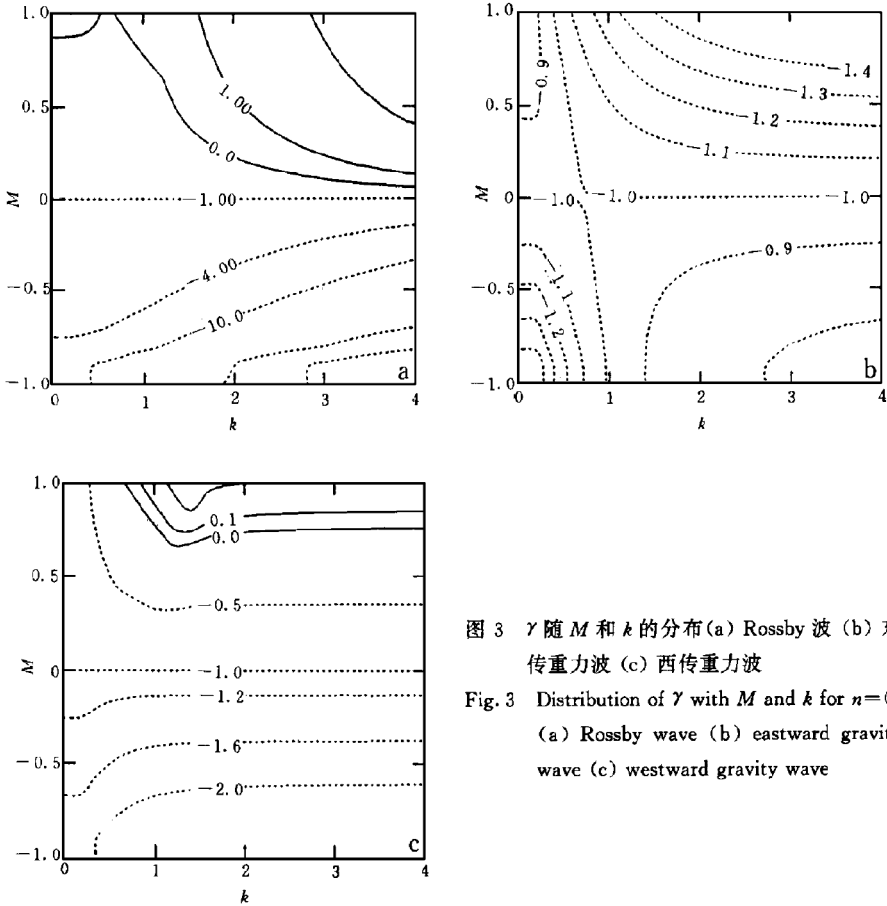


图 3 γ 随 M 和 k 的分布 (a) Rossby 波 (b) 东传重力波 (c) 西传重力波

Fig. 3 Distribution of γ with M and k for $n=0$ (a) Rossby wave (b) eastward gravity wave (c) westward gravity wave

于 $M < 0.5$ (即 $\bar{u} < 50$ m/s) 范围之内的解都满足约束条件, 而当 $k < 1$ 时, M 的允许范围更大, M 可取小于 0.75 (即 $\bar{u} < 75$ m/s) 以下的值. 由于上两节也只着重讨论了满足约束条件范围内波动的频率和增长率, 因此结论仍能成立.

另一个需要说明的问题是, 在赤道地区大气中另一类最有代表性的波动 Kelvin 波控制方程中考虑了基本气流的作用以后, 除引起 Kelvin 波频率的变化 ($\omega \rightarrow \omega - k\bar{u}$) 外, 对 Kelvin 波的振幅和稳定性都没有产生本质性的影响. 但考虑了基本气流的作用后, β 平面线性模式本征函数解在取 $n = -1$ 时, 已和 Kelvin 波本征函数解不一致, 即 Kelvin 波模态已不能象基本气流为零时那样包含在上述 β 平面线性模式中.

5 结 论

(1) 西风基本气流中西传 Rossby 波和西传重力波可产生混合现象, 而东风基本气流中 Rossby 波和重力波是完全可分的.

(2) 西风基本气流中的 Rossby 波将出现不稳定增长, 且存在有限波长的最大增长率, 即考虑了基本气流的作用后, 可以克服以前该方面工作中 Rossby 波不存在有限波长不稳定增长的缺陷。

参 考 文 献

- 1 Matsuno T. Quasi-geostrophic motion in the equatorial area. *J. Met. Soc. Japan*, 1966, **44**: 25~43
- 2 Maruyama T. Large-scale disturbance in the equatorial lower stratosphere. *J. Met Soc. Japan*, 1967, **45**: 391~408
- 3 Wallace J M and Kousky V E. Observational evidence of Kelvin waves in the tropical stratosphere. *J. Atmos. Sci.*, 1968, **25**: 900~907
- 4 Kuo H L. Instability theory of large-scale disturbance in the tropics. *J. Atmos. Sci.*, 1975, **32**: 2229~2245
- 5 刘德贵, 费景南, 于泳江. FORTRAN 算法汇编(第一分册). 北京: 国防工业出版社, 1980. 320~326.

THE EFFECTS OF BASIC FLOW ON THE EQUATORIAL ROSSBY WAVES AND GRAVITY WAVES

Zhou Xiaogang

(Beijing Institute of Meteorology, Beijing, 100081)

Zhong Zhong

(Air Force Institute of Meteorology, Nanjing, 211101)

Abstract

An equatorial β -plane linear model with basic flow was used to study the effects of basic flow on the equatorial waves. The results show that the equatorial Rossby wave and the gravity wave are still mixed in westerlies for $n=0$, but they are separated completely in easterlies, and the instable growth of the equatorial Rossby wave may occur in westerlies under some conditions.

Key words: Basic flow Mixed Rossby-gravity wave Wave instability