

Kalman 滤波的试验应用研究*

王 莉 黄嘉佑

(北京大学地球物理系, 北京 100871)

提 要

通过 Kalman 滤波与海温 ARMA 模型的结合试验, 对 Kalman 滤波的应用进行了研究. 对于如何选择 Kalman 滤波的初始参数, 提出了一种新的方法, 得到了较好的预报效果.

关键词: Kalman 滤波 初始参数 海温 ARMA 模型

引 言

自从 Kalman 滤波 60 年代问世以来, 越来越多的国家对于 Kalman 滤波给予了高度的重视, Kalman 滤波在科学领域也获得了广泛的应用^[1,2]. 我国气象工作者在天气预报方面应用 Kalman 滤波也取得了很多经验和成果^[3,4]. 但是对于如何找出一个更好、更普遍的方法来确定 Kalman 滤波的初始参数 $b(0)$ 、 $P(0|0)$ 、 $R(0)$ 、 $Q(0)$, 还没有定论. 本文通过 Kalman 滤波与海温 ARMA 模型的结合试验, 对于如何更好地确定 Kalman 滤波的初始参数 $b(0)$ 、 $P(0|0)$ 、 $R(0)$ 、 $Q(0)$, 提出了一种新的方法, 得到了较好的预报效果.

1 Kalman 滤波的原理和应用方法

1.1 原理

通常从数值模式输出的物理量中选取 P 个与局地要素 y 密切有关的因子 X_1, \dots, X_p , 在样本容量为 n 的样本中, 建立多元线性回归方程

$$y = Xb + \nu \quad (1)$$

其中: $y(n \times 1)$ 为量测随机矢量, $x(n \times p)$ 为预报因子阵, $b(p \times 1)$ 为回归系数向量(即要估计的未知常参数矢量), $\nu(n \times 1)$ 为未知随机变量矢量(遵从均值向量为零, 协方差阵为 R 的正态分布, 与回归系数向量的变化无关).

实际上, 由于样本资料的变化, 回归方程也应发生相应的改变, 需建立动态变化的预报方程.

* 国家重点基础研究发展规划项目“我国重大气候和天气灾害形成机理和预测理论的研究”及 908 短期气候预测课题资助.

1997-12-31 收到, 1998-03-09 收到修改稿.

即量测方程变为:
$$y(t) = X(t)b(t) + \nu(t) \quad (2)$$

状态方程:
$$b(t) = \phi(t, t-1)b(t-1) + \omega(t) \quad (3)$$

$\phi(t, t-1)$ 为转移矩阵, 它控制状态从一步到另一步的变化, 一般情况下, 实际应用中考虑状态变化过程为随机步行. 设 Φ 为单位阵, 则式(3)变为

$$b(t) = b(t-1) + \omega(t) \quad (4)$$

$\omega(t) (p \times 1)$ 为未知随机向量, 代表状态外推误差, 即系统噪声, 遵从均值向量为零, 协方差阵为 Q 的正态分布, 设其变化与 $b(t)$ 、 $\nu(t)$ 的变化无关.

定义估计误差协方差为: $P(t|t-1) = E[\tilde{b}(t|t-1)\tilde{b}(t|t-1)^T]$, 预报方程的更新依赖系数 $b(t)$ 的更新.

滤波过程如下:

$$\hat{b}(t|t-1) = \hat{b}(t-1)$$

$$P(t|t-1) = P(t-1|t-1) + Q$$

滤波增益矩阵 $A(t) = P(t|t-1)X(t)^T[X(t)P(t|t-1)X(t)^T + R]^{-1}$

状态更新 $\hat{b}(t|t) = \hat{b}(t|t-1) - A(t)[y(t) - X(t)\hat{b}(t|t-1)]$

误差协方差更新 $P(t|t) = P(t|t-1) - A(t)[X(t)P(t|t-1)X(t)^T + R]A(t)^T$

由以上可以看出, 给出状态和估计误差协方差的初值, 即:

$$E[b(0)] = \hat{b}_0$$

$$E[(b(0) - \hat{b}_0)(b(0) - \hat{b}_0)^T] = P_0$$

给定 $\nu(t)$ 和 $\omega(t)$ 的协方差阵 Q, R , 则可逐步更新状态参数. 增益矩阵 $A(t)$ 部分控制刚更新的量测值的权重, 使用量测值时, 量测噪声 R 会造成所估计的误差协方差的微弱减小. 量测误差小, 则会带来误差协方差的可观减小, 而且滤波更多取决于量测值, 从而使更新从一步到下一步的状态估计变化较大. 更新阶段, 状态估计和误差协方差更新之间没有相互作用, 计算 $P(t|t)$, Kalman 滤波产生其自己的误差分析, 它包含来自各种误差的累积和传播.

1.2 应用方法

(1) 通常, 可用最小二乘法(MLR)估计来确定滤波系数初值 $b(0)$. 用近期容量不大的样本, 按通常求回归系数估计值的办法求得.

(2) 据估计误差协方差阵 $P(0|0)$ 的定义, 如果滤波系数 $b(0)$ 初值严格为真值, 则 $P(0|0)$ 应为 $0^{[3]}$. 实际应用中, 如果没有较好的滤波系数初值 $b(0)$ 的估计, 可以将 $P(0|0)$ 取大, 使滤波快速收敛.

(3) 递推初始参数矩阵 $R(0), Q(0)$ 的确定. 通常是假定随机扰动的特性不随时间变化, 在运用 Kalman 滤波前就用 MLR 估计, 先确定 $R(0), Q(0)$ 值, 以后运用 Kalman 滤波递推时, $R(0), Q(0)$ 为常数, 详见文献[3].

本文则考虑随机扰动的特性随时间变化, 提出一种新的确定 $R(0), Q(0)$ 的方法: 即在每步滤波递推时, 将 $R(0), Q(0)$ 作相应的更新, 这样有可能得到更好的预报效果.

2 Kalman 滤波与 ARMA 模型的结合

选择海温距平的 ARMA 模型作为线性多元回归方程^[5]. 数据为 $180^\circ \sim 90^\circ W, 0^\circ \sim$

10°S地区 1951~1996 年的月平均海温资料,并求出标准化逐月海温距平。

2.1 第一类模拟预报

尝试将 Kalman 滤波应用于关于海温距平的 ARMA 预报方程^[5]:

$$T'_s(t) = \varphi_1 T'_s(t-1) + \varphi_2 T'_s(t-2) - \theta_1 \omega'(t-1) + \omega'(t)$$

其中: $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1$ 是常数,其余各变量意义同文献^[5].但在 Kalman 滤波中, $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1$ 是随时间变化的变量,分别表示为 $b_1(t), b_2(t), b_3(t)$.

长期预报可以运用当前月气象要素的观测值来预报下个月的,所以在 ARMA 预报过程中,海温均采用观测值进行 Kalman 滤波递推:

$$T'_s(t) = b_1(t)T'_s(t-1) + b_2(t)T'_s(t-2) + b_3(t)\omega'(t-1) + \omega'(t)$$

采用观测距平来修正滤波系数,预报矩阵为: $(T'_s(t-1), T'_s(t-2), \omega'(t-1))$,其中 $T'_s(t-1), T'_s(t-2)$ 为海温观测距平, $\omega'(t-1)$ 为白噪声。

(1)根据滤波初始参数 $R(0)$ 是量测误差协方差阵的物理意义,每滤波预报一次,将所得到的海温距平值与以前的每次滤波所得到的海温距平值构成一时间序列;求出海温距平观测值与预报值之差的时间序列的方差 rr ;下一步预报时将此方差用系数加以调整,作为滤波初始参数 $R(0)$ 的输入。

(2)根据滤波初始参数 $Q(0)$ 是状态外推误差协方差阵的物理意义,每滤波预报一次,将所得到的滤波系数与以前的每次滤波所得到的滤波系数构成一时间序列;求出滤波系数该月与上月的差值序列的方差 qq ;下一步预报时将此方差用系数加以调整,作为滤波初始参数 $Q(0)$ 的输入。

为了验证该方法的优越性,以下的试验均有将 $R(0), Q(0)$ 取为常数进行 Kalman 滤波预报的结果作对比.直接可用纯统计方法得出 ARMA 模型的系数,记为 $b_a/1.71, -0.75, -0.90/$,将它用于 ARMA 预报。

第一类模拟预报中,用观测海温距平值 $T'_s(t), T'_s(t-1), T'_s(t-2)$ 和白噪声 $\omega'(t)$ 得到滤波系数 $b(t)$,然后用观测海温距平值 $T'_s(t-1), T'_s(t-2)$ 、白噪声 $\omega'(t)$ 和滤波系数 $b(t)$ 得到预报海温距平值 $T'_s(t)$ 。

分析 Kalman 滤波和 ARMA 模型第一类模拟预报的误差(表 1),可以看出运用变参数 Kalman 滤波后的预报与观测的相关系数最高可达 0.9461,平均相关系数达 0.89,高于将 $R(0), Q(0)$ 取为常数的 Kalman 滤波预报与观测的相关系数,两者均高于纯 ARMA 模型的预报与观测的相关系数。

表 1 模拟逐月海温距平预报值与观测值的相关系数(r)及平均预报误差(s)(1951~1980 年)

方法	b_1	b_2	b_3	R	Q	P	r	s
KF(变)	1.71	-0.75	-0.90	1 倍 rr	1 倍 qq	500.0	0.9315	0.4118
	1.71	-0.75	-0.90	1 倍 rr	1 倍 qq	10.0	0.9461	0.3252
	1.71	-0.75	-0.90	1 倍 rr	1 倍 qq	10.0	0.8923	0.4514
	1.71	-0.75	-0.90	1 倍 rr	0.01 倍 qq	10.0	0.8701	0.4929
KF(常)	1.71	-0.75	-0.90	1.0	W	0.0	0.8789	0.4771
ARMA	1.71	-0.75	-0.90				0.8309	0.5625

注:KF(变)和 KF(常)分别表示变参数和常参数 Kalman 滤波,下同。

表 1 中将 $R(0), Q(0)$ 取为常数时的 Kalman 滤波预报时, $Q(0), P(0|0)$ 的取值按文

献[3]的方法,其中 $W = \begin{pmatrix} 0.0094 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0211 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0271 \end{pmatrix}$,但是按照文献[3]的方法所得 $R(0)$

的取值过小,使得滤波不收敛.本文尝试了很多种取值,认为 $R(0)$ 取为 1.0 比较合适,并进一步认识到 Kalman 滤波的初始参数 $R(0)$ 的确定尤为重要.

2.2 第二类模拟预报

第二类模拟预报中,我们只能得到当前月的观测 $T'_s(t)$ 值,所以要运用 Kalman 滤波有 3 种选择:

(1)由观测值 $T'_s(t)$ 、 $T'_s(t-1)$ 、 $T'_s(t-2)$ 和 $\omega'(t)$ 得出 $b(t)$,再由 $b(t)$ 、 $T'_s(t)$ 、 $T'_s(t-1)$ (观测值) 和 $\omega'(t+1)$ 得到预报值 $T'_s(t+1)$,依次逐步预报下去.

(2)无论是逐月预报,还是时段为 2 个月以上的预报,均可将 ARMA 模型的预报值作为下一个月的观测值,然后进行 Kalman 滤波预报,方法类同第一类模拟预报.

(3)对于时段为 2 个月以上的预报,由于不能得到观测值,还可以把 Kalman 滤波用于历史资料,得出收敛的 Kalman 滤波系数值 b_f ,然后将之用于 ARMA,以后的预报与纯 ARMA 预报方法相同.

用 1951 年 1 月~1980 年 12 月的海温观测距平资料取得滤波收敛参数 $b_f = /1.163, -0.555, -1.100/$.将之用于从 1981~1996 年 16 年间 Kalman 滤波第二类模拟海温距平逐月预报. Kalman 滤波采用上述方法(2).

分析 Kalman 滤波和 ARMA 模型 16 年第二类模拟逐月预报的误差(表 2),可以看出,运用变参数 Kalman 滤波后的 12 个月平均预报值与观测值的相关系数达 0.923,高于将 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 取为常数的 Kalman 滤波的 12 个月平均预报值与观测值的相关系数 0.910,而纯 ARMA 模型的 12 个月平均预报值与观测值的相关系数为 0.921.

表 2 1981~1996 年第二类模拟逐月海温距平预报值与观测值的相关系数(r)及平均预报误差(s)

	r_k (变)	r_A	r_k (常)	s (变)	s_A	s (常)
1 月	0.967	0.960	0.954	0.274	0.303	0.326
2 月	0.925	0.915	0.906	0.431	0.463	0.477
3 月	0.974	0.976	0.934	0.259	0.250	0.389
4 月	0.897	0.897	0.854	0.481	0.485	0.570
5 月	0.934	0.936	0.931	0.390	0.387	0.396
6 月	0.885	0.885	0.881	0.522	0.521	0.526
7 月	0.895	0.894	0.890	0.496	0.499	0.506
8 月	0.941	0.941	0.941	0.351	0.352	0.352
9 月	0.885	0.885	0.896	0.451	0.452	0.431
10 月	0.905	0.905	0.911	0.415	0.415	0.401
11 月	0.899	0.896	0.902	0.429	0.435	0.423
12 月	0.971	0.968	0.925	0.246	0.255	0.233

表 2 中变参数 Kalman 滤波的初始参数 $R(0)$ 为 1 倍的 rr , $Q(0)$ 为 1 倍的 qq , $P(0|0)$ 为 100.0,定参数 Kalman 滤波的初始参数 $R(0)$ 为 1.0, $Q(0)$ 为文献[3]所得值 W , $P(0|0)$ 为 0.0.

3 独立预报

将 ARMA 模型的预报结果作为下一个月的观测值,继而进行时段为 2 个月以上的 Kalman 滤波独立预报,结果列在表 3 中.

分析变参数和常参数 Kalman 滤波的独立预报误差,可以看出运用变参数 Kalman 滤波后,时段为 4 个月以内的预报平均相关系数高于将 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 取为常数的 Kalman 滤波预报与观测的相关系数;运用 Kalman 滤波后时段为 4 个月以内的预报效果好于纯 ARMA 模型的预报效果,且相关系数高于 0.5,有很好的参考价值,说明变参数 Kalman 滤波可提高长期预报的准确性.

表 3 初始月为 3~8 月独立时段为 2 个月以上的海温距平预报值与观测值的相关系数(1981~1996 年)

预报月	3 月		预报月	4 月		预报月	5 月	
	r_k (变)	r_k (常)		r_k (变)	r_k (常)		r_k (变)	r_k (常)
4 月	0.922	0.752	5 月	0.929	0.851	6 月	0.901	0.788
5 月	0.843	0.687	6 月	0.868	0.719	7 月	0.818	0.620
6 月	0.651	0.597	7 月	0.733	0.629	8 月	0.725	0.631
7 月	0.526	0.475	8 月	0.617	0.593	9 月	0.571	0.614
预报月	6 月		预报月	7 月		预报月	8 月	
	r_k (变)	r_k (常)		r_k (变)	r_k (常)		r_k (变)	r_k (常)
7 月	0.918	0.680	8 月	0.959	0.749	9 月	0.919	0.708
8 月	0.894	0.687	9 月	0.890	0.737	10 月	0.838	0.675
9 月	0.749	0.684	10 月	0.796	0.729	11 月	0.662	0.531
10 月	0.620	0.658	11 月	0.593	0.582	12 月	0.578	0.536

表 3 中变参数 Kalman 滤波的初始滤波参数 $R(0)$ 为 1 倍 rr , $Q(0)$ 为 1 倍的 qq , $P(0|0)$ 为 1.0;常参数 Kalman 滤波的初始滤波参数 $R(0)$ 为 1.0, $Q(0)$ 为 W , $P(0|0)$ 为 0.0.

4 Kalman 滤波初始参数 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 的确定

对于 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 的取值作了大量的试验,其中几幅有代表性的预报相关系数与 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 的关系图如下:

从图 1~图 3 可以看出:将 $R(0)$ 的范围取为 0.1~10 倍的 rr , $Q(0)$ 的范围取为 0.1~10 倍的 qq ,各试验方法均可得到较好的预报效果.本文所提出的确定 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 的新方法考虑到了 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 的物理意义,也考虑了随机扰动特性随时间的变化,所以方法本身给出了 Kalman 滤波初始参数 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 的随时间变化的较好取值范围.一般来讲,将 $R(0)$ 取为 1 倍的 rr , $Q(0)$ 取为 1 倍的 qq 即可.在预报过程中,对 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 取值范围的要求并不是很苛刻,也就是说将 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 取成 rr 、 qq 的倍数大一些或小一些,对预报结果的影响并不是很大,在试验过程中发现预报值与观测值的相关系数也不低于 0.8;而定参数 Kalman 滤波的情况下,初始参数 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 的取值不当,会使预报值与观测值的相关系数发生大的变化,许多文献都讨论了这方面的问题.这也充分体现出了变参数 Kalman 滤波的优越性.

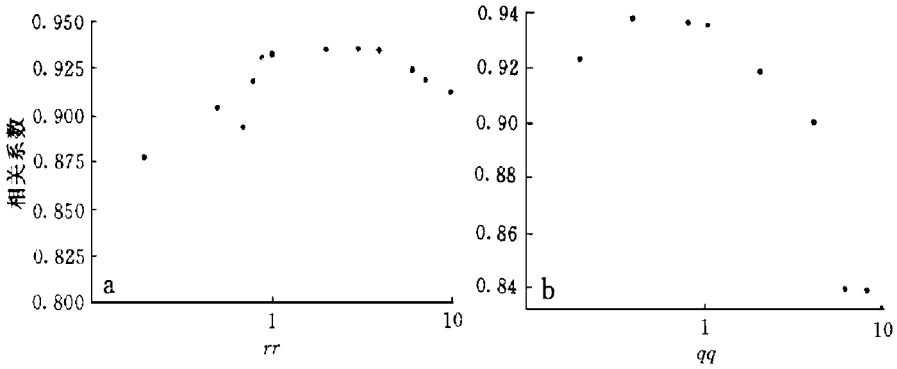


图 1 第一类模拟预报 (a) P 取为 500, $Q(0)$ 取为 1 倍的 qq (b) P 取为 100, $R(0)$ 取为 1 倍的 rr (横坐标为对数坐标, 其数值表示 $R(0)$ 、 $Q(0)$ 取为 rr 、 qq 的倍数)

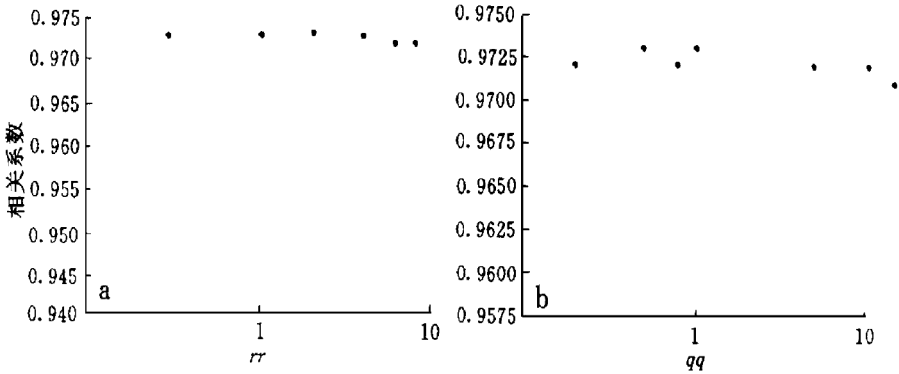


图 2 第二类模拟预报 (a)1 月, $P=100$, $Q(0)$ 取为 1 倍的 qq (b)1 月, $P=100$, $R(0)$ 取为 1 倍的 rr (说明同图 1)

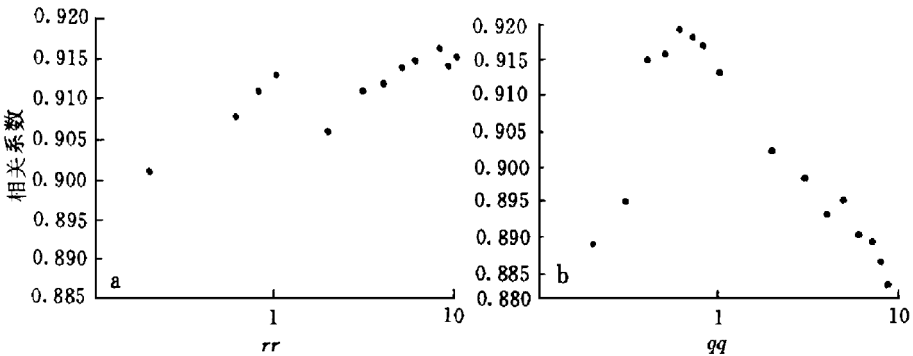


图 3 独立预报 (a)3 月报 4 月, $P=100$, $Q(0)$ 取为 1 倍的 qq (b)3 月报 4 月, $P=100$, $R(0)$ 取为 1 倍的 rr (说明同图 1)

5 结 论

(1) Kalman 滤波在理论上即第一类模拟预报中的效果是非常好的, 变参数 Kalman 滤波预报效果又好于定参数 Kalman 滤波的预报效果. 既可将其用来确定回归系数, 也可将其用于气候预报中的逐月滤波第一类模拟预报.

(2) 实际运用中, 采用 MOS 的输出结果作为下一预报时刻的观测值来修正滤波系数进行独立预报, 结果表明本文提出的变参数 Kalman 滤波预报效果同样好于定参数 Kalman 滤波的预报效果.

总之, Kalman 滤波的初始滤波参数的确定对于 Kalman 滤波的效果是至关重要的, 也是长期以来比较难以解决的问题. 本文在此方面作了一个比较有益的尝试, 得到了较好的试验效果. 至于怎样能给 Kalman 滤波的初始参数确定一个合理、方便、普适的标准, 还需要进一步努力研究.

参 考 文 献

- 1 黄嘉佑, 谢庄. 卡尔曼滤波在天气预报中的应用. 气象, 1993, 19(4): 3~7.
- 2 Kilpinen J. The application of Kalman filter in statistical interpretation of numerical weather forecasts. Preprints 12th Conf. Probability and Statistics, Amer. Meteor. Soc., 1992. 11~16.
- 3 陆如华, 徐传玉, 张玲, 等. 卡尔曼滤波在天气预报中的应用技术. 国家气象中心, 数值预报产品评价公报. 5~6 月双月刊, 1996, 28~36.
- 4 卢峰本. 卡尔曼滤波在沿海冬半年风力预报中的应用. 国家气象中心, 数值预报产品评价公报. 7~8 月双月刊, 1997, 39~43.
- 5 黄嘉佑. 赤道东太平洋地区海温的随机模拟. 热带气象, 1988, 4(4): 289~296.
- 6 Angell J K. Comparison of variation in atmospheric quantities with sea surface temperature variations in equatorial Eastern Pacific. *Mon. Wea. Rev.*, 1981, 109: 230~243.

THE EXPERIMENTAL STUDY ON KALMAN FILTERING

Wang Li Huang Jiayou

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871)

Abstract

The application of Kalman filtering was studied through an amount of experiments. The new way to select initial parameter of Kalman filtering was set up, and by which the better results for weather prediction were obtained.

Key words: Kalman filtering Initial parameter Sea surface temperature ARMA model