第 11 卷 2 期 应用气象学报 Vol. 11, No. 2
2000 年 5 月 QUARTERLY JOURNAL OF APPLIED METEOROLOGY May 2000

数值模式中的回溯时间积分格式*

曹鸿兴
(中国气象科学研究院, 北京 100081)

封国林
(兰州大学大气科学系, 兰州 730000)

在对微分方程初值问题的数值计算中, 当采用前向或后向差分格式时有两个时间层次, 而当用中央差分格式时则有 3 个时间层次. 由于把预报问题提为初值问题, 因此只有一个初始场的信息被利用. 本文从扩展信息源的角度出发, 对微分方程的时间积分提出了一种新格式—— 回溯时间积分格式, 并对在大气、海洋、水文等常用的平流方程进行了实例计算.

制约动力系统的微分方程可以写为:

$$\partial u/\partial t = F(u, t) \tag{1}$$

其中, u 为状态变量, F 为除局地变化项外的所有项, 称为源函数, 设时间间隔为 Δt, 式(1)的时间中央差格式为:

$$\begin{aligned} u(t+\Delta t) &= u(t-\Delta t) + 2\Delta t F(u, t) = \\ &a_1 u(t-\Delta t) + a_2 u(t) + b_1 F(u, t-\Delta t) + b_2 F(u, t) \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 2\Delta t$, 式(2)从计算流体力学来看是很自然的, 但从信息论来看, 系数 a_2、b_1 取为 0 是很可惜的, 等于抛弃了 $u(t)$ 和 $F(u, t-\Delta t)$ 中对预报有用的信息. 所以, 我们将时间层次 p' 推广到 $p' = p + 1 = 3$ 以上, 即有回溯时间积分格式

$$u(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{p} a_i u(t - i\Delta t) + \sum_{i=1}^{p} b_i F(t - i\Delta t) \qquad p \geqslant 2 \tag{3}$$

式中 p 为回溯阶, 系数 a_i、b_i 可以半理论半经验确定, 也可用观测数据藉最小二乘、遗传算法等确定.

平流方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial s} = 0 \tag{4}$$

其中 s 表示空间坐标, C 为常定平流速度.

其回溯格式为

$$u_j^{n+1} = \alpha_{-p} u_j^{n-p} + \sum_{i=-p}^{0} \alpha_i (u_j^{n+i})^m + \sum_{i=-p}^{1} (\theta_i u_{j+1}^{n+i} - \bar{\theta}_i u_{j-1}^{n+i}) \tag{5}$$

式中 α_{-p}, α_i, θ_i 和 $\bar{\theta}_i$ 为待定系数, 其中 θ_i 和 $\bar{\theta}_i$ 与参数 $\mu = -C\Delta t/\Delta s$ 有关, m 表示取 u_j^{n+i} 和 u_j^{n+i+1} 之间的中值.

当对系数取随回溯时次 $(t - i\Delta t)$ 呈指数衰减形式时, 运用经典的 von Neumann 方法, 我们从数学上证明了当取 $p = 2$ 时回溯格式的稳定性, 其稳定域比蛙跃格式要大.

数值计算是对由正弦和余弦组成的理想场进行的. 结果表明, 回溯格式比蛙跃格式其精度要高 2~5 倍. 回溯阶 p 取 3~5 为宜.

理想气流场由

* 本文受国家自然科学基金(49875025)资助.
1999-08-25 收到, 1999-09-01 收到修改稿.

$$u(x, t) = a\sin(mx - \sigma t) \tag{6}$$

计算得出, 式中

$$m = 2\pi/L_x, \quad L_x = 3600\ \text{km}, \quad \sigma = 2\pi/T$$

$$T = 5\text{d} = 5 \times 24\ \text{h}, \quad x_i = i\triangle x, \quad \triangle x = 300\ \text{km}$$

$$t_\tau = \tau\triangle t, \quad \triangle t = 1\ \text{h}$$

$$\sigma = mc, \quad a = 10\ \text{m/s}, \quad c = 8.3\ \text{m/s}$$

其中 m 为波数, c 为波速.

取$\triangle t= 1$ h, 先用式(6)计算 48h 作为样本场, 即取样本量 $N = 48$. 用最小二乘法求出系数 α_i, θ_i和 $\bar{\theta}_i$, 然后对 $N + 1$, $N + 2$……分别用蛙跃格式和回溯格式进行积分计算, 共积分了 600d, 回溯阶 $p = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. 由图1 显见, 回溯格式的均方根误差($RMSE$)远比蛙跃格式小. 其中以 $p = 5$ 的 $RMSE$ 最小, 其积分流场与理想流场的相关系数在 0.9142 附近摆动, 而蛙跃格式的相关系数则在-0.265 至 0.654 之间摆动. 由此可见, 回溯格式远比蛙跃格式好.

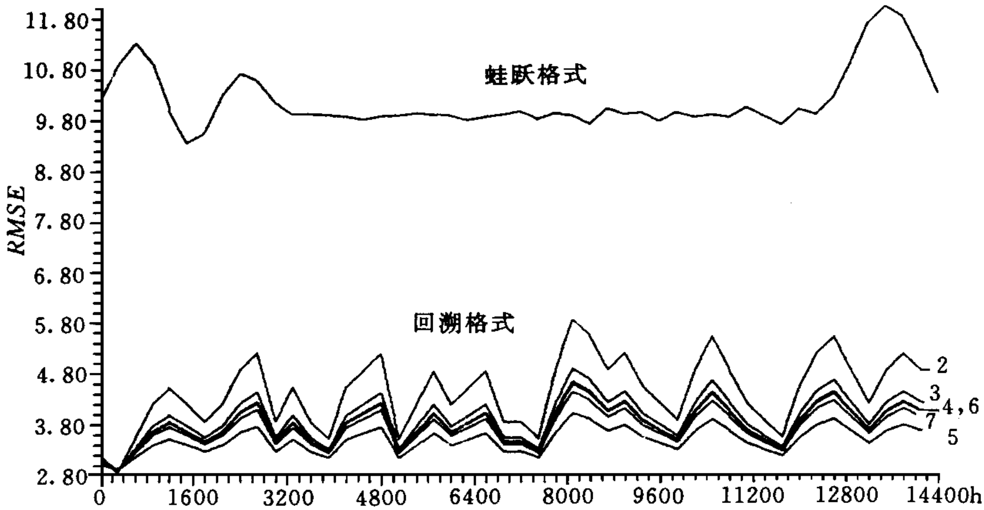

图1 积分流场与理想流场之间误差随积分时间的变化

(回溯格式中 2 表示回溯阶 $p = 2$, 其中 $p = 4$ 和 6 的 $RMSE$ 曲线几乎重合, 以 $p = 5$ 的 $RMSE$ 最小)