

山杏种植面积的动态规划*

蓝鸿第 毛 飞

(中国气象科学研究院, 北京 100081)

河南省鹤壁市一果园, 由较高山、低山、丘陵和平地组成, 拟用 60.00hm^2 土地种植收益较高的山杏。经调查在已经种山杏的其它地区, 四种地形净收益(表 1)后, 我们采用最优控制理论中的动态规划法为其决策。

表 1 不同地形不同面积(hm^2)种植山杏的净收益

	6.67	13.33	20.00	26.67	33.33	40.00	46.67	53.33	60.00
平地($g_1(u)$)	8.2	13.1	37.5	43.5	60.0	82.5	85.6	86.0	95.0
丘陵($g_2(u)$)	4.6	12.5	39.5	62.5	72.1	79.6	81.5	89.1	98.1
低山($g_3(u)$)	3.1	6.1	35.1	39.1	39.6	48.1	63.6	78.9	81.5
较高山($g_4(u)$)	6.2	7.5	18.6	21.6	29.3	42.7	82.1	84.3	96.7

1 动态规划方法概述

动态规划是美国学者贝尔曼提出的。他把复杂的最优控制问题变为阶段决策过程的关系, 即将活动过程划分为若干个互相联系的阶段, 而当起始阶段确定后, 它直接影响后面阶段的效果, 而后面各阶段的发展, 不受此阶段以前阶段的影响, 即“马尔柯夫性”。而且, 此方法是从最终阶段向前方向寻求最优策略, 故称“逆序决策”过程。

2 动态规划模型

从数学角度讲, 最优控制理论, 是泛函求极值问题, 苏联学者特里亚金构造了将状态方程与目标函数联系在一起的哈密顿函数。即:

$$H(x, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x, u, t) \tag{1}$$

式中: x 为状态变量, u 为控制变量, λ_i 为拉格朗日系数

研究最优控制问题, 应具备以下几个条件:

(1) 状态方程 $x_i = f(x, u, t) \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2}$

(2) 目标函数 $J = \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, t) dt \tag{3}$

(3) 边界条件 $x_i(t_0) = x_{i0}$ 初始条件 $x_i(t_f) = x_{if}$ 终端条件 $\tag{4}$

(4) 约束条件, 控制变量 u 的约束条件可用 $u \in \Omega$ 表示。 $\tag{5}$

$$\Omega = \{ x(t_f) \mid g_i(x(t_f), t_f) = 0, x(t_f) \in R^n \}$$

* 1999-09-07 收到, 1999-12-10 收到修改稿。

Ω 为目标集。

最优控制的目的是寻求最优控制 $u^*(t)$ 最优轨迹 $x^*(t)$, 使目标函数 J 取最优值, 即

$$J^* = \min_{u \in \Omega} \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, t) dt \quad (6)$$

若状态变量 $x(t)$ 对应于邻近时刻 $t + \Delta t$ 时, 在最优轨迹上增广状态空间有一点 $(x + \Delta x, t + \Delta t)$, 则改变了 $u(t)$, 使状态轨迹最优, 即式(3)为:

$$\Delta J^* = \int_t^{t + \Delta t} F(x, u, t) dt \quad (7)$$

按照动态规划的基本思路, 有如下函数关系:

$$J^*(x, t) = \min_{u \in \Omega} \left\{ \int_t^{t + \Delta t} F(x, u, t) dt + J^*(x + \Delta t, t + \Delta t) \right\} \quad (8)$$

经推导, 贝尔曼方程:

$$-\frac{\partial J^*(x, t)}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} \left\{ F(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J^*}{\partial x_i} f_i(x, u, t) \right\} \quad (9)$$

将式(9)右边和式(1)作一比较, 即可发现, 式(9)右边的表达式可用哈密顿函数代换, 即:

$$-\frac{\partial J^*(x, t)}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} H(x, \frac{\partial J^*}{\partial x}, u, t) \quad (10)$$

由此可见, 只要能写出哈密顿函数, 即可定贝尔曼方程。

3 动态规划的计算

据龚德恩指出的动态规划实际计算方法, 我们建立了山杏种植面积决策的模型。设四种地型为 4 个阶段, 即 $k = 1, 2, 3, 4$ 。 $x(k)$ 为 k 步可能种植面积, $u(k)$ 为实际种植面积, $g_i(u)$ 为净收益。

(1) 状态方程 $x(k+1) = x(k) - u(k)$

(2) 初始条件 $x(1) = 9$

(3) 终端条件 $x(5) = 0$

(4) 目标函数 $J_4 = \sum_{i=1}^4 g_k[u(k)]$

式中 g_k 为 k 阶段收益

第一步, 只考虑较高山种植, 由状态方程和终端条件, 有: $x(5) = x(4) - u(4) = 0$ 即: $u(4) = x(4)$

$$J_1[x(4)] = \max_{u(4)} g_4[u(4)] = g_4[x(4)];$$

第二步, 考虑低山、较高山两种地形的种植, 有

$$J_2[x(3)] = \max_{u(3)} \{ g_3[u(3)] + J_1[x(4)] \};$$

最后, 四种地形一同考虑, 有: $J_4[x(1)] = \max_{u(1)} \{ g_1[u(1)] + J_3[x(2)] \}$

计算结果为, 平地种 33.33 hm^2 , 丘陵种 26.67 hm^2 的收益最优为 122.5 万元, 为最优决策。

致谢: 本文承邵震豪, 曹鸿兴二位先生帮助, 特此致谢。