论辐射加热问题的时间积分*

廖 洞 贤
(国家气象中心,北京 100081)

提 要

在满足有界条件的数值解是计算稳定的定义下,讨论了辐射加热问题的时间积分,并证明:如辐射加热和其对时间的一阶微商均连续时,用向前差分格式计算的数值解是计算稳定的。还用一个例子证明:问题的数值解可以收敛到其解析解。

关键词:辐射加热问题 时间积分 计算稳定性

当前,对大气数值模式的时间积分,其绝热部分比较成熟,方法也比较多,对非绝热部分的时间积分,耗散过程比较成熟,但加热过程则讨论得较少。针对这种情况,本文对加热过程的时间积分进行了分析,并给出两个无条件稳定的计算方案。

1 计算稳定性

考虑加热过程是关系到系统生灭的重要过程,它可以使波幅随时间增长。对这样的过程,显然不能要求增幅因子小于或等于 1,也不能要求小于或等于 $1+0(\Delta t)$;因而,常用的计算稳定性定义不适用。不过,根据观测,加热引起的波幅增长是有界的,如果放松一点,可以采用满足有界条件的数值解,是计算稳定的。下面我们将在这个意义下来讨论加热过程的时间积分问题。

2 加热过程的数学物理性质

选择或设计时间积分方案应针对加热过程的数学物理性质。加热过程因其种类不同,其数学物理性质可以有显著差别。比如辐射,尽管它受到云、气溶胶等的影响,但其周期性很显著。它可以假定是多周期的连续函数,其空间分布也很有规律。可是,凝结潜热的释放却不是这样,无论在时间上和空间上,其出现和消失都比较突然,尤其是对流性降水,其空间分布的不连续性很明显,有些地方降水很强,很集中,而很多地方却没有降水。看来,只有在发生凝结的地区,在凝结持续期内,把凝结加热看成连续函数才是合理的。

另一方面,加热过程往往和平流过程、耗散过程等相伴出现,对其作时间积分本应在一起进行。但是,为了使计算简便,我们可以用分解算法把这些过程分阶段积分。这样,我们可以单独讨论加热过程的时间积分。

3 辐射加热的时间积分

(1) 方案一

(a) 方案 考虑辐射加热的热力学方程可以写作

* 1999-11-04 收到,2000-03-20 收到修改稿。

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{C_p}Q_R \tag{1}$$

其中 Q_R 是辐射加热率,设为时间的多周期的连续函数,且其对时间的 1 阶微商也是连续的。

对方程(1)作从 $t = t_0$ 到 $t = t_N$ 的积分,我们有

$$T(t_N) = T(t_0) + \frac{1}{C_p}\int_{t_0}^{t_N} Q_R \mathrm{d}t \tag{2}$$

根据假设,Q_R 是有界的,上式的积分也是有界的。考虑 $T(t_0)$ 是有界的,$T(t_N)$ 应当是有界的。而且,由于 Q_R 的周期性,对任一时刻 $t(> t_0)$,$T(t)$ 也应当是周期的。但是,在 Q_R 的周期远大于 $t_N - t_0$ 时,Q_R 在积分号下可能总是同一符号。这样,温度可能随时间一直增长(或减少)。这时,用时间离散化后的方程积分,也应有类似结果才合理。

方程(1)可以用向前差格式表示为

$$T^{t+\Delta t} = T^t + \frac{1}{C_p}Q_R^t \Delta t \tag{3}$$

于是

$$T^{t_N} = T^{t_0} + \frac{1}{C_p}\sum_{j=0}^{N-1} Q_R^{t_j}\Delta t \quad t_j = j\Delta t, j = 0,1,\cdots N-1, T^{t_0} = T(t_0) \tag{4}$$

根据假设,式(4)中的求和项有极限存在,并趋于 $\int_{t_0}^{t_N} Q_R \mathrm{d}t$,$Q_R$ 在 (t_N, t_0) 上是 Riemann 可积的[1],故

$$T(t_N) = T^{t_N} + E$$

其中

$$E = \frac{(t_N - t_0)^2}{2NC_p}Q'_R(\zeta) \qquad t_0 < \zeta < t_N$$

所以 T^N 是有界的,即计算是稳定的;而且是无条件的,也是周期的。

(b) 例子　设

$$Q_R = \hat{Q}_1 \cos\frac{2\pi}{\Lambda_1}t + \hat{Q}_2 \cos\frac{2\pi}{\Lambda_2}t \tag{6}$$

其中 Λ_1 和 Λ_2 表示年周期和日周期。代入方程(1)可以求得准确解

$$T(t_N) = T(t_0) + \frac{1}{2\pi C_p}\left(\Lambda_1 \hat{Q}_1 \sin\frac{2\pi}{\Lambda_1}t_N + \Lambda_2 \hat{Q}_2 \sin\frac{2\pi}{\Lambda_2}t_N\right) \tag{7}$$

相应的数值解为

$$T^{t_N} = T^{t_0} + \frac{1}{C_p}\sum_{j=0}^{N-1}\left| \hat{Q}_1 \cos\frac{2\pi}{\Lambda_1}t_j + \hat{Q}_2 \cos\frac{2\pi}{\Lambda_2}t_j \right| \Delta t \tag{8}$$

利用公式[2]

$$\sum_{j=0}^{N-1}\cos jx = \frac{\sin\left(N-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}$$

和

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

从式(8)可以得到

$$\lim_{x\to 0} T^{t_N} = T^{t_0} + \frac{1}{2\pi C_p}\left| \Lambda_1 \hat{Q}_1 \sin\frac{2\pi}{\Lambda_1}N\Delta t + \Lambda_2 \hat{Q}_2 \sin\frac{2\pi}{\Lambda_2}N\Delta t \right| = T(t_N) \tag{9}$$

(C) 误差增长 既然格式(3)的数值解可以随时间增长,其误差是否也随时间增长,仍是一个待研究的问题。设

$$T^{t_j} = \left(\prod_{K=0}^{j} G_k\right) T^{t_0} \tag{10}$$

其中 G_j 是 t_j 时刻的增长因子,即 $T^{t_j} = G_j T^{t_{j-1}}$,而

$$T^0 = \hat{T}^0 + \varepsilon^0 \tag{11}$$

$\hat{T}^0$ 是 t_0 时刻温度的真值,ε^0 是初始误差。如

$$T^{t_j} = \hat{T}^{t_j} + \varepsilon^j \tag{12}$$

其中 $\hat{T}^{t_j}$ 是 t_j 时刻在 $\varepsilon^0 = 0$ 时按式(10)应有的值。显然,

$$\hat{T}^{t_j} = \left(\prod_{k=0}^{i} G_k\right) \hat{T}^0 \tag{13}$$

把式(11),(12)代入(10)并和上式相减,则有

$$\varepsilon^j = \left(\prod_{k=0}^{i} G_k\right) \varepsilon^0 \tag{14}$$

如 T^{t_j} 随时间增长,则

$$\prod_{k=0}^{j} G_k > 1$$

故 $|\varepsilon^j|$ 也随时间增长。但

$$\frac{\varepsilon^j}{T^{t_j}} = \frac{\varepsilon^0}{T^{t_0}} \tag{15}$$

即相对误差不变。

(2) 方案二

(a) 方案 如果采用蛙跃格式,则方程(1)的差分形式可以写成

$$T^{t+\Delta t} = T^{t-\Delta t} + \frac{2}{C_p} Q_R^t \Delta t \tag{16}$$

当 N 为偶数时

$$T^{t_N} = \frac{2}{C_p} \sum_{\substack{j=2i+1 \\ i=0}}^{\frac{N}{2}-1} Q_R^{t_j} \Delta t + T^{t_0} \tag{17}$$

而

$$T^{t_{N+1}} = \frac{2}{C_p} \sum_{\substack{j=2i \\ i=1}}^{N/2} Q_R^{t_j} \Delta t + T^{t_1} \tag{18}$$

根据前面的假设,易证当 $\Delta t \to 0$ 时

$$T^{t_N} = T(t_N) = T(t_0) + \frac{1}{C_p} \int_{t_0}^{t_N} Q_R \mathrm{d}t \tag{19}$$

和

$$T^{t_{N+1}} = T(t_{N+1}) = T(t_1) + \frac{1}{C_p} \int_{t_1}^{t_{N+1}} Q_R \mathrm{d}t \tag{20}$$

如果 Q_R 连续且其对时间的 2 阶微商也连续,则用式(17) 求得的 T^{t_N} 有关系式

$$T(t_N) = T^{t_N} + E$$

而

$$E = -\frac{1}{9C_pN^2}(t_N - t_0)^3 Q''_R(\zeta) \qquad t_0 < \zeta < t_N$$

故 T^{t_N} 是有界的,即计算是稳定并且是无条件的。对于式(18)也有类似结果。

(b) 收敛性　设在 $t = t_1$ 时

$$T^{t_1} = T^{t_0} + \frac{1}{C_p}Q_R^{t_0}\Delta t = T(t_1) \tag{21}$$

则当 $\Delta t \to 0$ 时,从式(20)和(21),因

$$T^{t_{N+1}} = T^{t_1} + \frac{1}{C_p}\left(\int_{t_0}^{t_N} + \int_{t_N}^{t_{N+1}} - \int_{t_0}^{t_1}\right) Q_R \mathrm{d}t$$

上式成为式(19)。也就是说用式(16)和(21)构成的数值解是收敛的。

4　推　广

从前面的结果可以看出:如非绝热加热满足上面的条件,用它代替 Q,则格式(3)和(16),(21)仍然是无条件计算稳定的。

参 考 文 献

1　冯康.数值计算方法.北京:国防工业出版社,1978.43.

2　龙季和译.福里哀级数.北京:商务印书馆,1955.79.

ON THE TIME INTEGRATION OF RADIATION HEATING PROBLEMS

Liao Dongxian

(*National Meteorological Center, Beijing* 100081)

Abstract

Subject to the satisfaction of the definition that any bounded numerical solution can be said to be computational stable, discussions are made on the time integration of radiation heating problems. It is proved that the numerical solution obtained by the time forward difference scheme is stable if the heating and its first time derivative are continuous. On the other hand, in order to demonstrate the convergence of the numerical solution to the analytical solution of the problem, an example is given.

Key words: Radiation heating problem　Time integration　Computational stability